

# الرياضة للمسلمين

الجزء الثاني

بإشراف وزارة الشؤون الإسلامية  
بوزارة التربية والتعليم

# الرياضة للمليون

الجزء الثاني

تأليف

لانسوت هوجبن

ترجمة

الدكتور

عاطية بكالام عاشور

الأستاذ

عبد الحكيم لطفي

الدكتور

جهن محمد حسين

الدكتور

محمد طلال عويضة

الدكتور

راجي حليم قمار

راجعه

الدكتور

عبد المتواضع الشافعي

الدكتور

محمد رمزي حسن

مكتبة الشرق

ت ٥٧٦١٩ - النجدة - مصر

١٩٥٩

هذه ترجمة كتاب:-

**MATHEMATICS**

**For The**

**MILLION**

تأليف

*Lancelot Hogben*



# الباب الثامن

## تخطيط الكرة الأرضية

### المثلثات الكروية

مدد المبدأ الذي شيدت فيه الأهرام الكبرى . بل ربما قبل ذلك ، كان  
كعبة مصر السامريون ملتمسين بحقيقتين عن النجوم . أولاًهما أن نفس الفترة  
من الزمن تنقضي دائماً بين اللحظتين اللتين يعبر فيهما نجمان . مستوى الزوال ،  
أبى يصلان أقصى ارتفاع في السماء على الدائرة العظمى التخيلية المارة بالنقطة  
الشمالية من الأفق والنجم القطبي وتحت الرأس أو نقطة الجنوب .

والحقيقة الثانية أنه عند أي مكان تتكون الزاوية التي يصنعها النجم مع  
الأفق ( أي ارتفاع النجم ) والبعيد السوي للنجم دائماً ثابتين في اللحظة التي  
يعبر فيها النجم مستوى الزوال . وقد كان قدماء الكعبة يعتمدون في توقيتهم  
في صناعات زراعية — أشبه بتلك التي كانت اتباع عادة لتقدير زمن على بيضة  
في الماء — مسجلين بها أوقات عبور النجوم . ولم يكونوا قد اخترعوا جيداً  
قاعة ما عداوه نظراً لفلة ترسلهم .

ثم أصبح الكعبة رجالاً غير عمليين ونشأت طبقة جديدة من الرجال  
العميين ألا وهي طبقة البحارة الفينيقيين الذين أخذوا يجمعون المعلومات  
الجديدة عن السماوات ، وقد كانت تلك خطوة هامة جداً . ثم جاء البحارة  
الأغريق وقد عرفوا من قبل أن الفرق بين البعدين السبعين عند العبور لأى

مخطط كوكب التوماس وششكار  
في كتابه وصف الأرض في القرن الخامس قبل الميلاد

(1) من أجل أن يكونوا على يقين من أن النجوم التي تشرق في الشرق تشرق في الشرق وتغرب في الغرب

نجمين مقدسا عند مكائين مختلفين مقدار ثابت لا يتوقف على المكانين . فثلا  
عند مخفيس ( على خط عرض ٣٠ شمالا ) يكون عبور الشعري الثانية عند  
٤٦٥ جنوبا وعبور الدبران عند حوالي ١٤ جنوبا ، وعند لندن ( على خط  
عرض ٥١ شمالا ) يكون عبور الشعري الثانية عند ٦٨ جنوبا ، والدبران  
عند ٣٥٥ جنوبا . ففي كلتا الحالتين يكون الفرق المحلي ٢١ . وقد أدركت  
الضعوب البحرية القديمة أن هذا مزمده إلى أن النجوم ثابتة بالنسبة إلى بعضها  
وأن الأرض كروية . وقد كان من الأسباب التي جعلتهم يعتقدون بكروية  
الأرض رؤيتهم ظلا مستديرا للأرض عند ما تأخذ موضعا بين الشمس  
والقمر عند الحسوف القمرى وكذلك رؤيتهم اليومية للسفن وهي تختفي وراء  
الأفق . وكذلك ما أدركوه في أسفارهم من أن بروج جديدة تظهر وبروج  
بألوفة تختفي وراء الأفق عند إبحارهم شمالا أو جنوبا .

ولم يكن القدماء يعرفون سوى القليل جداً عن الأبعاد والقياسات إلى  
حوالي سنة ٣٥٠ ق . م . عندما عمل اراتوستينس أول قياسات لحجم الأرض  
وتلا ذلك اختراع الخرائط وقد كانت أولاها خرائط تصور السماوات ، وقد  
كان انشاء الخرائط الأرضية رهنا بتقدم مصوِّرات السماوات . وقد رسم  
هيكراكس الذي ذكرناه في الباب السادس مصوِّرا يبين مواقع ألف وثمانين  
من النجوم .

وقد كان رسم خرائط النجوم الأساس التي اللازم للسفريات البحرية  
الكبرى . وسنرى فيما بعد كيف كان رسم هذه الخرائط حافزا لابتكار أسلحة  
رياضية جديدة في الفترة التي تلت . وفي عام ١٤٢٠ ميلادية بنى هنرى أمير  
تاج البرتغال مرصدا في الجبال الواقعة عند أرض ساجرس الداخلة في البحر  
والمتجهة عند رأس سنت فينست ، وهي أقصى نقطة في جنوب غرب أوروبا .  
وهناك أيضا أنشأ مدرسه الملاحة كان أسسها جاك كوماج المايجور كوسى ،  
وكرس أربعين سنة من حياته للدراسات الكونية كما نظم رحلات استكشافية  
ما جعله يلقب بهنرى الملاحة . . وقد جتد عددا من مصوري العرب وفلكي  
اليهود ليعلموا قسطنطينة وابساعودهم في قيادة السفن ، وليحضروا الخرائط  
والجداول والالآت اللازمة . ويقرر بيتر تونسي ، أن كبار بحارة الأمير كانوا

بحريين بآلات ، وعلى دراية بقواعد الفلك والهندسة . تلك القواعد التي يجب  
أن يلم بها كل من يريد أن يرسم مصورا . وعاد بذلك علم الفلك جزءا من الحياة  
اليومية يدفعه إلى التقدم نحو التجارة البحرية معززا باختراع الساعة والتلسكوب .

وقد تقدم علم حساب الخرائط ، وهو ما نسميه أحيانا حساب  
المثلثات الكروية ، تقدما كبيرا على يد العرب ، في الفترة بين سقوط الحضارة  
الاسكندنافية ونشوء البحرية الأوربية ولو أن جميع القواعد الأساسية لهذا  
العلم كانت موضوعة من قبل . ويحتمل أن يجد القارئ بعض الصعوبة في هذا  
الباب إذا لم يكن أجرى تمرين ١٠ بالباب السادس .

والأبواب القادمة لاتعتمد على هذا الباب وقد أدخلناه هنا لكي يدرك  
القارئ كيف تقدمت الرياضة لكي يحتاجات الانسان العمليسية . وإذا كان  
للقارئ هوية التجارة لامتكن أن يدرك كيف يطبق النظريات الرياضية في حل  
المسائل الفلكية التي يجمع هو نفسه المعلومات اللازمة لها بآلات يصنعها  
بنفسه وفي منزله .

### رسم خرائط النجوم

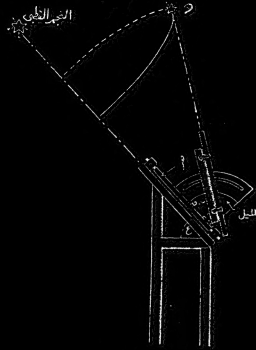
عند الخروج في زهرة خلوية نتعرف على الطريق بواسطة علامات مميزة  
تخطيطية . هكذا يتعرف البحار على طريقه بواسطة النجوم . فإذا جنبحت  
به السفينة إلى جزيرة مبحورة بعد مرض دام عدة أسابيع فإنه يستطيع  
أن يحدد ما إذا كان جنوب خط الاستواء أو شماله ، وذلك من مظهر السماء .  
وإذا كان شمال خط الاستواء فإنه يستطيع أن يرى النجم القطبي وفي بعض  
أوقات السنة الدب الأكبر . أما إذا كان جنوبه فهو لا يرى النجم القطبي ولما  
يرى صليب الجنوب وبروج أخرى لا يمكن رؤيتها عند خط عرض  
لندن أو نيويورك . فإذا كانوا في مكان ما في جنوب خط الاستواء فأننا  
لا نستطيع معرفة خط عرض ذلك المكان من ارتفاع النجم القطبي كما هو  
موضح في الباب الرابع . وذلك لأنه لا يوجد نجم لامع يضيء قريبا جداً فوق  
القطب الجنوبي . وخرائط النجوم التي بدأ رسمها الاسكندريون هي التي تربينا  
كيف نعين خط عرض أى مكان نقيم به بمعرفة اسدياثبات أى نجم ظاهر



الزاوية مع سمت الرأس كلما يغير مستوى الزوال. وتوضيح الحقيقة أن النجوم تبدو كأنها تتحرك في أقواس دائرية تقع في مستويات متوازية متعامدة مع المحور القطبي من حقيقة أخرى هي أن الفرق بين البعدين السمتين الزوالين، لا يجم، عند مكانين معينين يساوي الفرق بين ارتفاعي القطب عند هذين المكانين. ويمكن التأكد من ذلك بتثبيت سهم متجه نحو القطب السماوي وتثبيت تلسكوب (أو أي أداة قصيرة من الصلب) بحيث يمكن تحريكه أي زاوية حول السهم كجور (شكل ١٠٨). فإذا جعلنا التلسكوب يميل بزاوية معينة بحيث يشير إلى نجم معين فإنه يمكننا أن نتبع حركة النجم أثناء الليل بتحرك التلسكوب حول محوره بدون خفضه أو رفعه. وإذا كان التلسكوب مجهزاً بجهاز دقيق لتعيين الزمن بحيث أنه يتحرك  $360^\circ$  في اليوم النجمي (أي الزمن الذي يمضي بين عبور أي نجم لمستوى الزوال مرتين متتاليتين) فإنه يشير دائماً إلى نفس النجم.

والحقيقة أن أي نجم معين يغير مستوى الزوال قبل أو بعد أي نجم معين آخر بعدد ثابت من الدقائق، قد أوضحت إلى قدماء الفلكيين بأن النجوم منتشرة على دوائر عظمى ثابتة تقاطع جميعها عند القطبين السماويين.

يمكننا إذن تحديد موضع معين لكل نجم على الكرة السماوية، بنقطة تقاطع دائرتين (شكل ١٠٩)، إحداهما دائرة عظمى هي دائرة مطع المستقيم للنجوم (وتناظر دائرة الطول) تقطع جميع الدوائر المائلة عند القطبين السماويين، والأخرى دائرة صغرى هي دائرة الميل (تتناظر دائرة العرض) تقع في مستوى عمودي على المحور القطبي. وتعد دوائر الميل بطريقة مماثلة لتلك التي تعد بها دوائر العرض أي بالزاوية التي يقبلها عند مركز الكرة الأرضية قوس خط الزوال المخصوص بين نقطتي تقاطعه مع دائرة الميل ودائرة المعدل (heavenly equator). (شكل ١١٠). وما نسميه المحور القطبي للكرة الأرضية ماعداً إلا المحور الذي تبدو النجوم كأنها تدور حوله، وإن كان ماسميه مستوى دائرة الاستواء ماعداً إلا المقطع للكرة الأرضية بمستوى دائرة المعدل. والمحيط الذي يصل الراصد بمركز الكرة الأرضية (أنظر كتاب الرابع) يمر



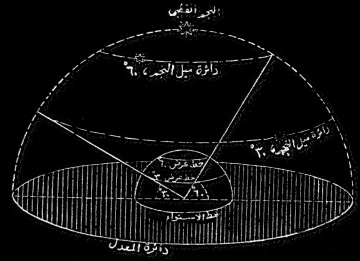
شكل (١٠٨)

تلسكوب عند أن يسير يتركب من قطعة من الخشب وقطعة أيونية من الخشب. وتتحرك الأيونية الخشبية حول محور. أ. بحيث يميل بزاوية  $\alpha$  (حد عرض المكان) نحو الشمال. ويمكننا تحريك التلسكوب وهو يميل بزاوية  $\beta$  (حد عرض النجم) بغير أن  $\alpha + \beta = 90^\circ$  الميل = حول  $\alpha$ ، أي بزاوية النجم  $\beta$ . بحيث يرى النجم دائماً.

يسمى رأس الراصد قطعاً دائرة العرض ودائرة ميل مناظرة في السماء. وأي نجم على دائرة الميل هذه، يمر فوق الراصد عند أي نقطة على دائرة العرض المناظرة، مرة كل ٢٤ ساعة. وعلى ذلك عند ما رسمت خرائط النجوم بهذه الكيفية لتكون دليلاً لنا في الملاحظة أصبح من السهل رسم الخرائط الجغرافية بكيفية مائلة.

وهنا أن ندرك أن رسم خرائط النجوم بهذه الكيفية يجعلنا نعلم الاتجاه الذي نصوب فيه التلسكوب لرؤية النجوم. وهو وضع النجم كما هو موضح على خريطة النجوم ليس له علاقة بما يبعده النجم عنا. وإذا غرنا في الأرض أن





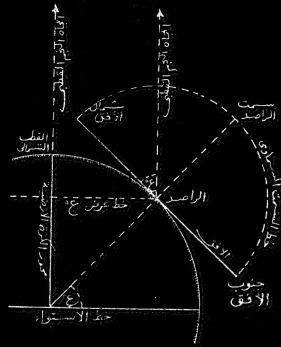
شكل (١١٠) دوائر العرض على سطح الكرة الأرضية ودوائر الميل على سطح الكرة السماوية (دوائر مسمو)

الميل = خط عرض الراصد + البعد السموي عند عبور مستوى الزوال.

وإذا كان النجم يعبر جنوب سمت الرأس فإن العبارة هي :

الميل = خط عرض الراصد - البعد السموي الزوال .

والعبارة الأولى تكون صحيحة إذا عبر النجم شمال أو جنوب سمت الرأس، إذا نحن اعتبرنا الأبعاد الموضحة مقيسة جنوب سمت الرأس سالبة واعتبرنا خط العرض مقيسا جنوب خط الاستواء أو الميل مقيسا جنوب دائرة المعدل سالبا . وخط عرض المكان هو نفسه ارتفاع القطب فوق الأفق ( الباب الرابع ) . وعندما لم يكن هناك نجم قطبي لايح كافي عهد الإسكندر بين كان يؤخذ متوسط ارتفاع أي نجم قريب من القطب عندما يكون في أقصى ارتفاع له فوق مستوى الزوال وفي أسفل موضع تحته . الخط المستقيم الذي لا يقع في مستو معين بالفرارغ . يقطع هذا المستوى على الأكثر في نقطة واحدة . فالخط المائتيم الذي يمر بأكثر من نقطة واحدة في نفس المستوى يقع بأكثر من نقطة في هذا المستوى كما تقع تلك النقطة التي يمر بها . والمستوى الذي يعنه خط طول

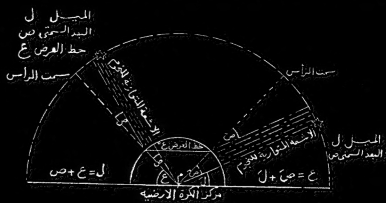


شكل (١١١) خط عبور النجم مستوى الزوال يقع النجم في نفس المستوى مع الراصد ونفس الكرة الأرضية وسمت الرأس ونقط شمال وجنوب الأفق ودائرة الكرة الأرضية

الراصد ومحور الكرة الأرضية يشمل مركز الكرة الأرضية والراصد ونقطي الكرة الأرضية . والخط الواصل بين سمت الرأس والراصد يمر أيضا بمركز الكرة الأرضية أي يمر بأكثر من نقطة واحدة في هذا المستوى . وإذا كان يقع بأكثر من نقطة في هذا المستوى . وشمال وجنوب الأفق هما تقاطع مستقيمتين وأصله من خط الطول إلى مركز الكرة الأرضية مع المستوى الأفق ، فهما يقعان في نفس المستوى مع هذه المستقيمتين . وإذا كان شمال وجنوب الأفق وسمت الرأس والراصد يقع جميعها في نفس المستوى مع مركز الكرة الأرضية ونقطيها .

والدائرة التي تقطعها مستوى ولا تقع فيه نقطة في نقطتين . والدائرة التي يمر بشمال وجنوب الأفق وسمت الرأس تمر بأكثر من نقطتين في نفس

المستوى وإذا تقع بأقلها فيه . وإذن أية نقطة على هذه الدائرة الخيلية  
(خط الزوال السماوي) تقع أيضا في هذا المستوى .



شكل (١١٢)

لنلاحظ في الشكل التالي من الكرة الأرضية . محور الأرض يسمى الزوال . والسمت الرأس  
هو القطب الأرضي . وإذا كان محور الأرض هو السمت الرأس فإن خط العرض = البعد  
السمي للزوال . وإذا كان محور الأرض هو السمت الرأس فإن خط العرض = البعد  
السمي للزوال . وإذا كان محور الأرض هو السمت الرأس فإن خط العرض = البعد  
السمي للزوال .

كما سبق أن درسنا في الباب الرابع خط عرض الراسد (م) هو الزاوية (ا)  
بين الأفق والقطب السماوي (ن) . أي الزاوية م ن س . وإذا كان كان النجم (ا)  
يعبر احتمال سمت الرأس فإن

$$م ن س = م ن + البعد السمي$$

وبما أن ميل النجم هو الزاوية التي يصنعها التي يصنعها النجم مع دائرة المعدل التي تتعامد  
مع المحور القطبي فإن :

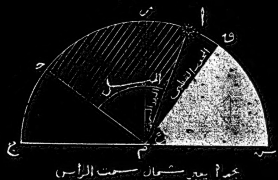
$$\text{الميل} = ٩٠ - م ن$$

$$= ٩٠ - (م ن - البعد السمي)$$

$$= ٩٠ - (خط العرض) + البعد السمي$$

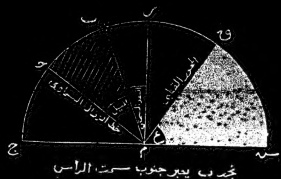
أي الميل = خط العرض + البعد السمي .

وإذا كان النجم (ب) يعبر جنوب سمت الرأس فإن :



شكل (١١٣)

الميل إلى البعد السمي = ٩٠ - م ن س = ٩٠ - (خط العرض)  
أي الميل = خط العرض - البعد السمي



شكل (١١٤)

شكل (١١٤) خط العرض الرأس = البعد السمي للزوال .

وكما يمكننا إيجاد خط عرض مكان ما بمشاهدة البعد السمي لأي نجم عند  
عبوره ما يسمى الزوال . إذا علمنا ميل النجم من خريطة النجم . يمكننا أيضا  
إيجاد خط طوله المكان بمشاهدة أوقات عبور أي نجم مستوى الزوال . إذا

علينا مطلع المستقيم للنجم (أشكال ١١٤، ١١٥، ١١٦) من خريطة النجم، وكان لدينا كرونومتر بعضنا الوقت الربيعي. وتعد دوائر خطوط الطول بالدرجات من صفر إلى ١٨٠° شرق وغرب خط زوال جرينتش الربيعي (صفر°). ويقاس مطلع المستقيم دائماً شرق خط الزوال السماوي الذي تقع عليه نقطة الاعتدال الربيعي التي هي جرينتش السماوية ويرمز لها بالرمز الفلكي  $\alpha$ . وهي الموضع الذي تشغله الشمس عند الاعتدال الربيعي (٢١ مارس). وتبدو الكرة السماوية أنها تدور ٣٦٠ كل ٢٤ ساعة. ولذلك نفضل أن نعد دوائر مطلع المستقيم بالساعات والدقائق من صفر إلى ٢٤ ساعة، وحيث أنها تبدو أنها تدور من الشرق إلى الغرب فإن النجم الذي يكون مطلع

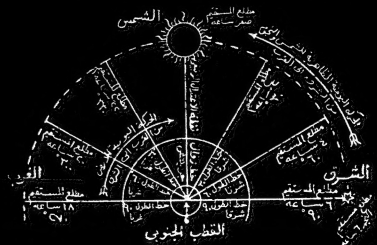
دقيقة ساعة

المستقيم له ١٣:٢١ (مثل السالك الاعول أحد كوكبات السفينة) يعبر مستوى

دقيقة ساعة

الزوال بعد ١٣:٢١ من وقت عبور الشمس عند نفس المكان، يوم الاعتدال

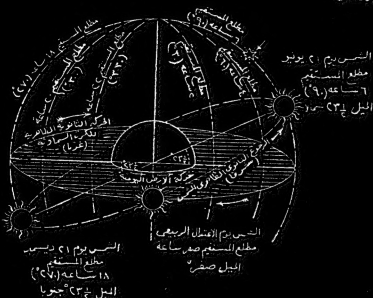
الربيعي. أي أن النجم يعبر مستوى الزوال الساعة ١٠:٢١ صباحاً، بالتوقيت



شكل (١١٤)

العبور عند جرينتش يوم ٢١ مارس - توقيت العروق بين مطلع النجم ومطلع الشمس والزمين.

المحلي. وإذا كان الزمن بتوقيت جرينتش، عند العبور هو ١٠:٢١ مساءً فأنتا تفهم من ذلك أن الزمن عند الراصد يسبق الزمن عند جرينتش بثلاث ساعات وأن عند ظهر جرينتش يكون الزمن بالتوقيت المحلي عند الراصد ٣ مساءً. وإذا نخط طول الراصد (انظر شكل ٦٣) هو  $3 \times 15 = 45^\circ$  شرق جرينتش.



شكل (١١٥)

يوم الربيعي (حيث مطلع المستقيم ٠ ساعة) مستوى الزوال عند الظهر ٠ يوم ٢١ يونيو، ويعبر في منتصف الليل يوم ٢١ ديسمبر. أي أن النجم يعبر خط منكم الجوزاء.

وعند الظاهر يكون مطلع مستقيم الشمس، عند العبور في الكرة السماوية في نفس مستوى خط طول الراصد. فإذا كان الراصد ٣٠° غرب جرينتش فإن الكرة الأرضية يجب أن تدور ٣٠° أي ١/٢ من الدورة الكاملة، لمدة ساعتين قبل أن يصبح زوال الراصد في مستوى زوال الشمس، أو أن الشمس يجب أن تبدو أنها تدور ٣٠° قبل أن يصبح زوالها في مستوى زوال الراصد. وإذا نخط طول الراصد يكون بعد ظهر جرينتش لمدة ساعتين.



والساعة المضبوطة بتوقيت جرينتش تسجل الساعة الثانية مساءً عند ما  
تغير الشمس مستوى زوال الراصد أى عند الظهور المحلى للراصد. وإذا كان  
مطلع المستقيم للشمس يساوى صفراً يوم ٢١ مارس فإن النجم الذى يكون  
مطلع المستقيمة ٦ ساعات يعبر مستوى الزوال الساعة السادسة مساءً بالتوقيت  
المحلى. وإذا عبر النجم الساعة الثامنة مساءً بتوقيت جرينتش فإن ساعة الراصد  
تكون متأخرة ساعتين بالنسبة إلى ساعة جرينتش وإذاً خط طول الراصد  
هو ٣٠ غرباً. ويوضح الشكل حركة النجوم ضد عقرب الساعة عند النظر  
نحو النجم بالقرب من القطب الجنوبي.



الشكل (١١٦)

جانب (أ) من خريطة العالم يوضح اتجاهات حركة النجوم عند النظر نحو القطب الجنوبي. (ب) جانب من خريطة العالم يوضح اتجاهات حركة النجوم عند النظر نحو القطب الشمالي.

إذا كان مطلع المستقيم للشمس هو ١١ فإن الشمس تعبر بعد ١١ ساعة من  
الساعات بعد نقطة الاعتدال الربيعى ٧ (مطلع المستقيم صفر). وإذا كان

مطلع المستقيم للنجم ٥١ فإنه يعبر بعد ٧ من الساعات بعد ٧. وإذاً يعبر  
النجم بعد الشمس بمقدار ٥١ - ٧ من الساعات وإذاً فالزمن المحلى للعبور  
هو (٥١ - ٧) أى ٤٤.

مطلع المستقيم للنجم - مطلع المستقيم للشمس = الزمن المحلى للعبور.  
وقد يكون الفرق سالبا كما فى المثال الموضح فى الشكل حيث الزمن المحلى  
للعبور = ١٥ - ١٥ ساعة ٩٠ دقائق قبل الظهور أى ٨ ساعات ٥١  
دقيقة بعد الظهور (٥١ - ٨). ويوضح الشكل أن الشمس تعبر قبل ٧  
ثلاث ساعات، وأن النجم يعبر بعد ٧ بخمس ساعات ٥١ دقيقة، ومنها

الزمن المحلى للعبور هو ٥١ - ٨ = ٤٣ دقيقة.

وفى الأوقات الأخرى من السنة علينا أن نأخذ فى الاعتبار أن موضع  
الشمس بالنسبة إلى الأرض والنجوم الثانية تغير بمقدار ٣٦٠ أى بمقدار ٢٤  
ساعة من ساعات مطلع المستقيم، كل ٣٦٥ يوما، والقيمة المضبوطة لمطلع  
المستقيم للشمس فى كل يوم من أيام السنة معطاة فى التقاويم الفلكية التى تقيم  
الحكومات الحديثة من أجلها مرصداً عامة. وبدون استخدام الجداول  
يستطيع الراصد أن يحسب الزمن بالتقريب مقبلاً من الظهور المحلى كما أتى  
(أنظر شكل ١١٦). بما أن النجوم تعبر مستوى الزوال متكررة قليلاً بكل  
ساعة. فتبدو الشمس كأنها تتحرك نحو الشرق ويبدو مطلع مستقيماً يتغير  
بمقدار ٣٦٠ = ١ (أى ١ من الساعة (٤ دقائق) بوحدة الزمن، فى كل يوم.  
ولنفترض أن منكب الجوزا يعبر عند لحظة ما يوم أول مارس. وإذاً  
فالشمس عليها أن تتحرك ٣٠ يوماً نحو الشرق قبل أن تصل نقطة الاعتدال  
الربيعى أى أنها تعبر مستوى الزوال قبل نقطة الاعتدال الربيعى بمدة ٨٠

دقيقة (٨٠ - ٣٠). فإذا كان مطلع المستقيم لمنكب الجوزا هو ٥١ فهو

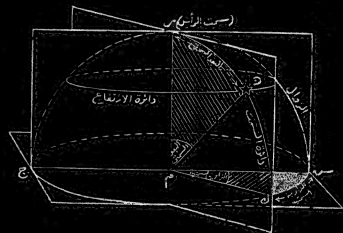
يعبر مستوى الزوال بعد ٧ بمدة ٥ ساعات ٥١ دقيقة، وإذاً يعبر بعد الظهور  
بمدة ٢٠ + ٥١ = ٧١. وإذاً فالزمن المحلى هو ٧١ - ٧ = ٦٤ دقيقة.





الأرضية. وإذا تقاس الزاوية السميثة للجم شرقاً أو غرباً ابتداءً من خط الزوال.

وإذا ركبنا الاسترولات المثلث أو التيردوليت الموضح في شكل ١١٩ بحيث يدور رأسياً فوق قاعدة مدرجة بحيث يشير الضيف إلى الجنوب أو الشمال، فإن الزاوية السميثة للجم هي الزاوية التي يتحركها المظهر (أي التلسكوب) فوق القاعدة. ونحصل على الارتفاع بطرح البعد السمي من  $90^\circ$ ، فإذا كانت المسافة مدرجة من صفر إلى  $90^\circ$  ومن  $90^\circ$  إلى صفر فإنه يمكن قراءة الارتفاع مباشرة.



شكل (١١٩) - تيردوليت محمول للجم

تدور الأرض من الارتفاع إلى  $90^\circ$  البعد السمي. وطول البعد السمي  $20^\circ$  تدور الأرض من  $20^\circ$  من دائرة العرض إلى  $90^\circ$  من دائرة العرض. والارتفاع الزوايا السميّة تقاس بالخطوط المرسومة في الزاوية التيردوليت من  $90^\circ$  إلى  $0^\circ$  في الطرف بين مستوى الزوال من مرجح ويكون البعد السمي  $90^\circ$ .

وإذا ثبتنا التلسكوب نحو نجم وأدرفناه بعد قليل إلى حيث نرى النجم ثانياً فإننا نرمس قوساً على سطح الكرة الساهوية شبه معيار بصفة على سطح البحر. وإذا فكرنا ملياً في الطريقة التي يتحرك بها بصفة فإننا ندرك أن السفينة لا تتحرك على خطوط أفلاطيس المستقيمة، بل تتحرك على أقواس دائرية على سطح الكرة

الأرضية. وأقصر قوس يمكن رسمه بين نقطتين هو أقصاها تحديداً. وهو إذن القوس الذي يكون أكثرها قطراً، أي قطره يساوي قطر الكرة الأرضية نفسها. وإذا كان في الملاحة، أقصر بعد بين نقطتين ليس هو خط أفلاطيس المستقيم بل الدائرة العظمى التي تمر بهما. وإذا أجرت سميتان من  $A$  إلى  $B$  إحداهما في الطريق المباشر من  $A$  إلى  $B$  والثانية بدون تغيير خط عرضها حتى تصل خط طول  $B$  ثم بدون تغيير خط طولها حتى تصل  $B$  فإن الطريقتين يكونان شكلًا له ثلاثة أضلاع هي ثلاثة أقواس دائرية. بالمثل عندما يدور نجم أو يتحرك في السماء على دائرة مثله علينا أن نحرك العين أفقياً في قوس زاوية الارتفاع ورأسياً في قوس الزاوية السميّة حتى تتبع حركته. والحركة الظاهرية للنجم وحركته العين أو حركة التلسكوب ترسمان مثلاً في قبة السماء أضلاعه مقوسه. وللاصول إلى أي نقطة في السماء يجب أن يدور النجم حول المحور القطبي زاوية خاصة بعيداً عن خط الزوال بينما يكون التلسكوب قد دار زاوية معينة حول المحور السمي. ويكون النجم قد دار زاوية خاصة



شكل (١٢٠) - تيردوليت محمول للجم. وتظهر الزاوية السميّة والارتفاع الزوايا السميّة تقاس بالخطوط المرسومة في الزاوية التيردوليت من  $90^\circ$  إلى  $0^\circ$  في الطرف بين مستوى الزوال من مرجح ويكون البعد السمي  $90^\circ$ .





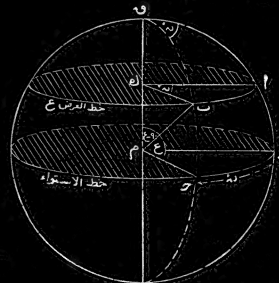
ذلك بواسطة عملية حسابية بسيطة لا تعرض فيها للثغرات الكروية ، إذ أن الدوائر التي توازي خطوط العرض ( ما عدا خط الاستواء نفسه ) ليست دوائر عظمية ، إذا علينا الزاوية ، بالدرجات أو التقدير الدائري ، التي تصل بين طرفي قوس إلى مركز الدائرة التي هو جزء منها فإننا نعلم أيضاً طول هذا القوس . فالفرق ، درجة واحدة في خط الطول في أي موضع على خط الاستواء يساوي  $\frac{1}{60}$  من محيط الكرة الأرضية . وإذن إذا اعتبرنا نصف قطر الكرة الأرضية

$$= 3960 \text{ ميلا فإن هذا الفرق}$$

$$= 3960 \div 2 \times 2 = 3960$$

$$= 11 \times \frac{1}{4} = 69 \text{ ميلا (تقريباً)}$$

ويلاحظ أن استواء الكرة الأرضية عند القطبين ، هذا المقدار يساوي درجة واحدة من درجات العرض مقبسة على خط طول . أو درجة واحدة مقبسة على أي دائرة عظمية على سطح الكرة الأرضية .



شكل (١٢٢) طريقة إيجاد جردية بين درجات الطول مقبسة على أي دائرة عرض .  
 جـ . دو نقطتان على خط الاستواء ، (ا) و (ب) نقطتان على دائرة عرض ، (د) و (ع) نقطتان على دائرة عرض ، (س) و (ع) نقطتان على دائرة عرض .  
 الكرة الأرضية . جـ و د مستوي خط الاستواء . ا و ب مستوي خط العرض . س و ع مستوي خط العرض .  
 قطر الكرة الأرضية (س) .

و الفرق مقداره درجة واحدة في خط الطول مقبسة على أي خط عرض آخر يمكن الحصول عليه بسهولة كما هو موضح في شكل ١٢٢ حيث يساوي د من درجات الطول مقبسة على خط العرض ع ٦٠ و د يساوي د من درجات الطول مقبسة على خط الاستواء . محيط دائرة الاستواء ٢٤٠٠٠ ميل .  
 أقواسها د يساوي ٢ ط × م ج ، وإذن فالدرجة الواحدة

$$\frac{24000 \text{ ميل}}{360} = 66.6 \text{ ميل}$$

$$\frac{24000 \text{ ميل}}{360} = 66.6 \text{ ميل}$$

$$\frac{24000 \text{ ميل}}{360} = 66.6 \text{ ميل}$$

والزاوية كم ب = ٩٠° ع و بما أن المستوى ك ب د يتقاطع مع المحور القطبي ، إذن ك ب د مثلث كروي قائم الزاوية فيه م ب = ٩٠°

$$\frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}}$$

$$\frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}}$$

$$\frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}}$$

$$\frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}} = \frac{\text{ك ب}}{\text{م ب}}$$

$$\frac{24000 \text{ ميل}}{360} = 66.6 \text{ ميل}$$

$$\frac{24000 \text{ ميل}}{360} = 66.6 \text{ ميل}$$

$$= 66.6 \times 60 = 3996 \text{ ميل (تقريباً)}$$





ولكني تدرك جيداً الارتباط بين أجزاء المثلث الكروي وأجزاء  
المثلثات الأربعة المستوية التي تتكون أوجه هرم صغير، نقُصُ قطعة من  
الورق تطابق شكل ١٢٤. مرسومًا عليها المستقيمتان والأقواس الموضحة في  
نفس الشكل، ونطبق هذه الورقة عند الأحرف م، ن، ك، ب، ك عندما يحتاج  
إلى ذلك. وجميع القوانين التي ستحتاج إليها موضحة على الأشكال المرسومة.  
وعند ما نفرغ من عمل هذا النموذج نقصه إلى أجزاء كما في شكل ١٢٤ (١)،  
حتى نشاهد كل مثلث في الموضع المعتاد. من ذلك نرى، كما هو موضح في  
شكل ١٢٤ (١) وباستخدام القاعدة الخاصة بالمثلثات المستوية، أن

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \quad \text{ك، م جتا ١}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \quad \text{ك، م جتا ١}$$

وإذن

$$\left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin \beta} \right) + \left( \frac{1}{\sin \gamma} - \frac{1}{\sin \delta} \right) = 0 \quad \text{ك، م جتا ١ + ١، ٥، ٢}$$

$$\text{ك، م جتا ١} = \text{صفرًا}$$

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \quad \text{ك، م جتا ١}$$

وبالتقسيم على ك، م نحصل على

$$\frac{1}{\sin \alpha} = \frac{1}{\sin \beta} + \frac{1}{\sin \gamma} + \frac{1}{\sin \delta} \quad \text{ك، م جتا ١}$$

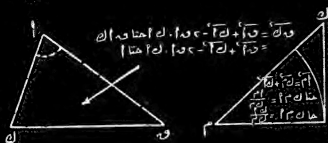
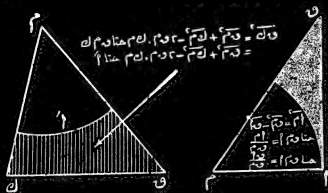
$$= \text{جتا ١ جتا ٢ م} + \text{١ جتا ٢ م} + \text{١ جتا ٢ م} + \text{١ جتا ٢ م}$$

$$= \text{جتا ١ جتا ٢ م} + \text{جتا ٢ جتا ١ م} + \text{جتا ٢ جتا ١ م} + \text{جتا ٢ جتا ١ م}$$

وإذن القانون الذي يعطينا الصلح الثالث عندما نعمل الضلعين الآخرين  
ب، د، ج، والزوايا المحصورة بينهما ١ هو

$$\text{جتا ١} = \text{جتا ٢ جتا ٣ م} + \text{جتا ٣ جتا ٢ م} + \text{جتا ٣ جتا ٢ م}$$

وواضح أن من السهل استدراك هذا القانون بسبب كيفية تركيبه، وضح  
أن رجوع إلى الكتاب عند ما نريد استخدامه.

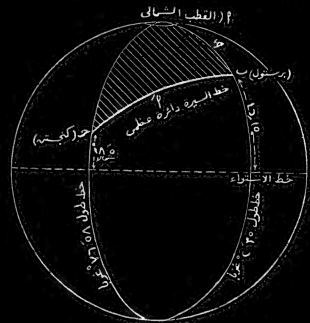


شكل (١٢٤) (١)

تعيين اتجاه حركة سميكة:

إن الشخص العاقل لا يحاول الاستمرار في دراسة من هذا النوع قبل أن  
يتأكد من وجود بواحي عملية تطبيقها. والمثال الأول هو من نوع يمكننا أن  
تنسب به سادات طولان، متى كان لدينا خريطة تعطينا أطوال الطرق البحرية  
المبينة اتجاهاتها بواسطة خطوط منقطعة. فإذا كنا نملك مثل هذه الخريطة،  
علينا أن نتذكر أن هذه الأطوال تعطي عادة بالأميال البحرية (١ ميل بحرياً  
= ١.٨٥ ميل بحرياً) ويجب ألا يفوتنا أن السفينة تغير اتجاه حركتها  
بضعة مرات قبل أن تعد عن أو عندما تقترب من، اليابسة. فالخريطة تعطينا  
مثلاً الطريق بين رسول بالبحر وكنيسة بجيكيا على أنه ٣.٥ ميل بحرياً  
أي ما يزيد نحو ٢٥ ميلاً عن القيمة التي نحتاجها فيما يلي، وذلك لأننا عند إيجاد  
هذه القيمة الأخيرة لن نعمل حساباً للخروج من قنال رسول أو الدخول إليها  
كجيكيا (انظر شكل ١٢٥).

خط عرض برستول هو  $٥١^{\circ} ٢٦'$  شمال خط الاستواء. وإذن  $٢٨^{\circ} ٣٤'$  من القطب، وخط طولها  $٢^{\circ} ٣٥'$  غربا. وخط عرض كنجستن هو  $١٨^{\circ} ٥٥'$  من القطب، وخط طولها  $٧٦^{\circ} ٥٨'$  غربا. والأقواس الثلاثة، القوس  $\alpha$  والواصل من القطب إلى برستول، والقوس  $\beta$  الواصل من القطب إلى كنجستن، والقوس  $\gamma$  قوس الدائرة العظمى التي يقع عليها الطريق من برستول إلى كنجستن، تكون متساوية. وبما معلوما منه الضلعان  $\beta$  و  $\gamma$  والزاوية المحصورة بينهما  $\alpha$  التي هي الفرق بين خطي الطول  $٧٦^{\circ} ٥٨' - ٢^{\circ} ٣٢' = ٧٤^{\circ} ٢٦'$ .



شكل (١٢٥) دائرة عظمى تجر عليها سفينة.

وإذن يمكننا إيجاد قيمة  $\alpha$  بأن نكتب  
 جتا  $\alpha =$  جتا  $٧١^{\circ} ٥٥'$  جتا  $٢٨^{\circ} ٣٤'$  - جتا  $٧١^{\circ} ٥٥'$  حا  $٢٨^{\circ} ٣٤'$  جتا  
 $٧٤^{\circ} ٢٦'$ . وباستخدام الجداول  
 جتا  $\alpha = ٣١.٠٤ \times ٧٤.١٩ + ٦.٢٣٤ \times ٩٥.٦ = ٢٦٩٢.٢ = ٤٠.٢٢$   
 أي أن  $\alpha$  تساوي  $٦٦^{\circ}$  (تقريبا) من محيط دائرة عظمى، أي محيط الكرة

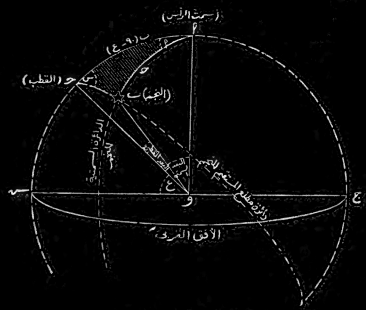
الأرضية. وحيث أن الدرجة الواحدة من محيط الكرة الأرضية تساوي ٦٩ ميلا تقريبا، إذن فالمسافة بين برستول وكنجستن تساوي  $\frac{1}{2} \times ٦٩ \times ٤٥٧٧ = ٣٩٨٠$  ميلا بحريا (تقريبا).

وقبل أن نبدأ في المثال الثاني، الذي سوف لا نجد فيه أى صعوبة، بعد أن تكون قد أجرتنا حل عدة مسائل من النوع السابق، بالاستعانة بقائمة خطوط الطول وخطوط العرض لنواقيس المختلفة المطبوعة في نهاية أغلب المصورات، يجب أن نلاحظ أنه لا بد من إجراء عملية الطرح كتحصيل على الضلعين  $\beta$  و  $\gamma$  للزاوية  $\alpha$  (٩٠ - جتا  $\alpha$  - خط العرض للمكانين). وذلك لأن حا (٩٠ - س) = جتا س جتا (٩٠ - س) = جتا س جتا (٩٠ - س) = حا س. وفيكنا إذن كتابة العبارة السابقة على الصورة  
 جتا (المسافة) = حا خط العرض الأول  $\times$  خط العرض الثاني + جتا خط العرض الأول  $\times$  جتا خط العرض الثاني  $\times$  جتا (خط الطول الأول - خط الطول الثاني)

يفرض أن خطي الطول مقيدان معا شرق أو غرب خط زوال جريش. أما إذا كان أحدهما مقبسا شرقا والآخر مقبسا غربا فإن الزاوية تساوي مجموع خطي الطول وتكتب جتا (خط الطول الأول + خط الطول الثاني) بدلا من جتا (خط الطول الأول - خط الطول الثاني).

### ميل الكوكب

لقد سبق أن رأينا أن ميل (أو مطلع مستقيم) كوكب مثل الزهرة أو عطارد لا يمكن الحصول عليه بمشاهدته وهو في مستوى الزوال، وأن ميل (أو مطلع مستقيم) كوكب بعيد مثل المريخ أو المشتري لا يمكن تعيينه بمشاهدته وهو في مستوى الزوال إلا عند عبوره أثناء الظلام. وإذن فليس يمكن أن نحدد مرابع كوكب ما بالنسبة إلى النجوم الثابتة أثناء حركته بأكملها، إلا إذا أمكننا تعيين ميله ومطالع مستقيمتها بطريقة أخرى. والواقع أنه يمكننا إيجاد دليل بنفس الطريقة التي أوجدنا بها المسافة التي تجررها سفينة ما على دائرة عظمى.



شكل (١٢٩). مثلث الجيب  
قانون مع شكل ١٢٩ و ١٢٨

نعتبر الموضع المحلي للنجم عند لحظة ما، وأسمنا من رؤوس مثلث كروي (شكل ١٢٩)، مثل المثلث الذي في المثال السابق الخاص بالبعد بين رستون وكينجستون، نعتبر الضلع ب الذي يناظر البعد القطبي لكينجستون، البعدين القطب السماوي وسمت الرأس مقياسا على خط الزوال الرئيسي، وحيث أن ارتفاع النجم هو نفسه خط عرض المكان، إذن  $B = 90^\circ - \text{خط العرض}$ . أخيراً نعتبر الضلع ج، القوس بين النجم وسمت الرأس مقياساً على الدائرة العظمى التي تحدد الزاوية السمعية للنجم — أي الدائرة السمعية للنجم — وهذا القوس هو البعد السمعي للنجم (أي  $J = \text{البعد السمعي}$ )، والزاوية المضمورة بين الدائرة السمعية وخط الزوال الرئيسي الذي يقطع الدائرة السمعية عند سمت الرأس هي الزاوية السمعية للنجم، ويتم بطرفي القوسين د، ك ج الدائرة العظمى التي تمثل النجم بالقطب السماوي، أي يقطع المستقيم للنجم، ويطول القوس بين النجم والقطب السماوي مقياساً على مداره مستقيم النجم، هو البعد

القطبي للنجم. وحيث أن القطب السماوي على بعد  $90^\circ$  من دائرة المعدل، إذن فالبعد القطبي للنجم، أي الضلع الثالث في المثلث الكروي هو الفرق بين  $90^\circ$  وميل النجم ( $1 = 90^\circ - \text{الميل}$ ). ولأن تطبيق القانون نحصل على:

جنا ( $90^\circ - \text{الميل}$ ) = جنا ( $90^\circ - \text{خط العرض}$ ). جنا البعد السمعي + جنا ( $90^\circ - \text{خط العرض}$ )  $\times$  جنا البعد السمعي = جنا الزاوية السمعية

ويمكن كتابة هذا القانون على الصورة

$$J \cos(\text{الميل}) = J \cos(\text{خط العرض}) + \text{جنا البعد السمعي} \times \text{جنا الزاوية السمعية}$$

وعند تطبيق هذا القانون الأخير يجب ألا ننسى أننا نقيس الزاوية السمعية من النقطة الشمالية، فإذا كان النجم يعبر جنوباً فإن الزاوية السمعية يصبح أن تكون أكبر من  $90^\circ$  وفي هذه الحالة نقيسها من النقطة الجنوبية. وبما أن القانون:

$$\cos 90^\circ = \cos 90^\circ + \cos 12^\circ \times \cos 12^\circ$$

$$\text{بصحة } \cos 90^\circ = \cos 90^\circ + \cos 12^\circ \times \cos 12^\circ \text{ جنا } (180^\circ = J)$$

عندما تكون ج أكبر من  $90^\circ$  (عمر ١٠، بالباب السادس) فإن قانون حل المثلث الكروي يصبح

جنا الميل = جنا خط العرض + جنا البعد السمعي = جنا خط العرض + جنا البعد السمعي. جنا الزاوية السمعية. ومن هذا القانون نرى أنه إذا علمنا الزاوية السمعية والبعد السمعي لأي جسم سماوي، عند لحظة ما فإنه يمكننا إيجاد ميل هذا الجسم دون انتظاره إلى أن يصل مستوى الزوال. ولا يمكننا بنفس السهولة استخدام هذا القانون في إيجاد خط عرض المكان بمشاهدة نجم معلوم ميله. إلا أننا إذا علمنا البعد السمعي والزاوية السمعية لكل من نجمين، عند نفس المكان فإنه يمكننا إيجاد خط عرض هذا المكان بفرض أنه لدينا تقويم فلنكن أم مصر ببطيخا، ول النجم زبرجذ نام، إن إجماع هذه العمليات

الحماية يستغرق وقتاً أقل من الوقت الذي نستغرقه في انتظار وصول نجم  
لأعلى معروف إلى مستوى الزوال.

ويمكننا أيضاً تطبيق القانون السابق في إيجاد اتجاه جسم سماوي عند  
شروقه أو غروبه عند خط عرض معلوم، أو العكس، في إيجاد خط عرض  
المكان إذا علم اتجاه النجم عند الشروق أو الغروب. ففي اللحظة أو  
غروب الجسم السماوي يكون البعد السمتي للجسم  $90^\circ$  وجب أن جتا  $90^\circ =$   
صفرًا، جا  $90^\circ = 1$ ، فإن القانون السابق يتحول إلى الصورة  
جا الميل = جتا خط عرض . جتا الزاوية السمتية .

فمثلاً عند الاعتدالين عندما يكون ميل الشمس صفرًا

جتا خط العرض = صفرًا

ولذلك جتا الزاوية السمتية = صفرًا

ولذلك فالزاوية السمتية =  $90^\circ$ .

أو أن الشمس تشرق نحو الشرق وتغرب نحو الغرب في جميع أجزاء  
المعمورة، ذلك اليوم.

ولإيجاد اتجاه شروق أو غروب الشمس عند خط عرض  $51^\circ$  شمالاً  
(لندن) في الواحد والعشرين من شهر يونيو عندما يكون ميل الشمس  
 $23\frac{1}{2}^\circ$  شمالاً، نضع

جا  $23\frac{1}{2}^\circ =$  جتا  $51^\circ$  . جتا الزاوية السمتية .

وباستخدام الجداول نجد أن

$39.87 = 23.5^\circ$  جتا الزاوية السمتية

جنا الزاوية السمتية =  $74.05^\circ$

الزاوية السمتية =  $50.4^\circ$

أي أن الشمس تشرق وتغرب في اتجاه يصنع  $50.4^\circ$  مع مستوى الزوال،  
نحو الشمال، أي  $90^\circ - 50.4^\circ = 39.6^\circ$  شمال الشرق أو الغرب، وبالعكس  
يمكن استخدام اتجاه الشروق والغروب لإيجاد خط عرض المكان.

عبارة أخرى خاصة بالمثلث الكروي.

أول التعريف في ميل الكوكب لا يمتثل ما يمتثل التعريف في مطلع المستقيم،  
وذلك لأن الطريقة التي يتغير بها مطلع المستقيم يمكن شرحها بسهولة إذا نحن  
فهمنا أن الأرض والكواكب تدور حول الشمس كما اعتقد أرسطارخس  
وعلمكو برونك. وهذا الكتاب ليس كتاباً في الفلكيات، ولذا لن ندرج  
وقتنا في محاولة معرفة كيف يوصل كوبرنيك إلى اعتقاده هذا. ويمكن  
القاري أن يضل على ذلك إذا أراد في أي كتاب في الفلكيات إذا كان  
يلزم بطريقة تعيين مواقع الكواكب.

بالعودة إلى المثلث السمتي في شكل ١٢٦، نرى أن الزاوية  $\gamma$  بين  
القوس الذي يمثل البعد القطبي للشمس والقوس  $\beta$  الذي هو الزاوية بين  
الرصد ونقط الكرة الأرضية ( $90^\circ$  - خط العرض) هي الزاوية التي قد  
دارها النجم منذ الملاحظة التي كان عندها على مستوى الزوال.

وحيث أن الكرة السماوية تدور أثناء تدور  $360^\circ$  كل ساعة أي  $15^\circ$   
كل ساعة فإن الزاوية  $\gamma$  تسمى أحياناً بالزاوية الساعية للشمس، وذلك لأنه  
يكافئ لإيجاد الزمن (بالساعات) الذي قد مضى منذ عبور النجم بقسمه عدد  
الدرجات على  $15^\circ$ . فإذا علمنا زمن عبور النجم مسوي الزوال، والوقت  
الحالي فإننا نعلم أيضاً مقدار الزمن الذي قد مضى منذ عبور الشمس مسوي  
الزوال وذلك لأن الزمن يقاس بهذه الكيفية. وإذا علمنا مطلع المستقيم للشمس  
في نفس اليوم فإننا نعلم أيضاً مقدار الزمن الذي قد مضى منذ عبور  $\gamma$  مستوى  
الزوال. أي أننا نحصل على مطلع المستقيم للشمس بأن نضيف إلى زمن عبوره  
مطلع المستقيم للشمس.

ولإيجاد مطلع المستقيم بمعلومة خط عرض النجم وزاوية السمتية عند لحظة  
ما نحتاج إلى معرفة إحدى الزاويتين الباقيتين من المثلث الكروي الذي علمنا  
مبه مطلعين والزاوية المحصورة بينهما. والقانون الذي كنا نستخدمه في حساب  
المثلثات المسنونه (الباب السادس) هي

$$\text{حاح} = \text{ح} \frac{\text{ح}}{\text{ح}} \text{ (أو حاح} = \text{ح} \frac{\text{ح}}{\text{ح}} \text{ إذا علمنا أن)}$$

أما القانون المناظر في حساب المثلثات الكروية فهو

$$\frac{\frac{\text{جاء ح أ}}{\text{ج ح أ}}}{\frac{\text{ج ح أ}}{\text{ج ح أ}}} = \frac{\text{ج ح أ}}{\text{ج ح أ}} = \text{ج ح أ}$$

ويمكن الحصول على هذا القانون من الشكل ( أنظر الملحق الأول ) أو من القانون السابق باستخدام قواعد الضرب في علم الجبر واستخدام القاعدة

جناۃس = ۱ - ح۲س ۶ حیث من آیہ زاویرہ .

نلاحظ أنه كما يمكننا الحصول على  $\alpha$  بمعلومية  $\beta$  و  $\gamma$   $\alpha$  من القانون

$$\text{جنا ۱} = \text{جناب جناح} + \text{جای حاج جنا ۱}$$

فإنه يمكننا أيضاً الحصول على ح إذا علمنا  $a$  و  $b$  و  $c$  من القانون

جناح = جناح + جناح جناح .

وتبرهن قاعدة الجيب كما يأتي :

من القانون الاول

— جِنا | حَا | حَا حَ = جِنا حَ — جِنا حَ —

وَبِتْرَابِيعِ الْإِلَهِاتِ فِينِ

$$x \text{ جنا } 2 + \text{جنا } 1 = \text{جنا } 3$$

و بإجراء التعويض

$$(1 - \alpha)(1 - \beta) = (1 - \alpha)(1 - \beta) + \alpha\beta$$

$$1. \text{ حَابٌ حَاوٌ حَا } 1 \text{ حَابٌ حَاوٌ حَا } = 1 - \text{حَابٌ} - \text{حَاوٌ} \\ 2. \text{ حَابٌ حَاوٌ حَا } - 2 \text{ حَابٌ حَاوٌ حَا } + 1 - \text{حَاوٌ}.$$

وَيُحَذِّفُ حَاءَ "بَ حَاءَ" حَاءَ "حَاءَ" مِنْ الطَّارِئِينَ تَحْصِلُ عَلَى

[illegible]

وبما أن الطرف الأسير متماثل في الآيات **٦** **٧** **٨** نستنتج أننا نحصل على نفس المقدار إذا نحن بدأنا بالقانون الثاني

جناح = جناح جناب + ح' آ جناب جناح  
وَأَنَا فِي هَذِهِ الْحَالَةِ نَحْصِلُ عَلَى

— — — — —

$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$

وبالقسمه على

 $\frac{1}{M} \frac{dM}{dt}$ 

$\frac{V}{W} = \frac{C}{W}$

ومع أن برهان هذا القانون صعب بعض الشيء إلا أنه لا توجد صعوبة مافى تطبيقها. وفي الشكل ١٦٦، ١٦٧ إلى الزاوية المسمّنة  $\phi$  جـ، والبعد المسمى  $\phi$  أهر البعد القطبي (٩٠ = الميل) البحر إلى جـ = ١١ حتا الميل، وإذن

جاء الزاوية الساعية = جاء الزاوية الساعية

ولنفرض مثلاً أن الزاوية الساعية لأحد نجوم الجبار ١٠° وهو غرب

دقیقه ساعة

خط الزوال عند الساعة ٤ : ٨ بعد الظهر بالوقت المحلي . لقد عبر النجم مستوى الزوال منذ ١١ ساعة = ٤ دقيقة أى عبر فى تمام الساعة الثامنة . وإذا ن قطع المستقيم لهذا النجم أكبر من مطلع المستقيم للشمس بمقدار

دَقِيقَةٌ سَاعَةٌ

٨ ساعات . فإذا كان مطلع المستقيم للشمس في هذا اليوم ٥٠ : ٢١ فإن الشمس

دقيقة ساعة

دقيقة ساعة

تعتبر بمقدار ١٠ : ٣٠ قبل ٥ أى أن ٥ تعتبر الساعة ١٠ : ٢٠ بعد الظهر .

ولذلك يعتبر النجم بمقدار ٨ : ١٠ = ٢ : ٥ : ٥٠ بعد ٥ ولذا فنقطع

دقيقة ساعة

المستقيم لهذا النجم = ٥ : ٥٠

ويمكننا نفس القانون من حساب وقت شروق وقت غروب أى نجم عند أى مكان معين . فبعد الشروق أو الغروب يكون البعد السمتي للجسم السماوي ٩٠° . وحيث أن جا ٩٠° = ١ يأخذ القانون الصورة :

حاصل الزاوية السمتية  
حاصل الميل

و تعين الزاوية السمتية عند شروق النجم أو غروبه من العبارة التي سبق ذكرها

حاصل الميل  
حاصل خط العرض

نأخذ مثالا بأن نوجد وقت شروق الشمس يوم الانقلاب الشتوي في الليل ( خط عرض ٥١° ) . من القانون الأخير ، الزاوية السمتية للشمس عند شروقها أو غروبها يوم الانقلاب الشتوي هي ٩٠° من النقطة الجنوبية ، ولذا عند الشروق أو الغروب

جا ٩٠° = ٠

جا ( ٥١° ) = ٠,٧٦٦٩

٠,٩١٧٩

٨٣٧٣

وبما أن ٨٣٧٣ = جا ٥١° ٥٦° ، إذن فالوقت الذي يمضي بين الشروق أو الغروب ومستوى الزوال ( أى الظهر ، إذ أننا ندرس حركة الشمس )

دقيقة ساعة

دقيقة ساعة

يساوي ٥١° ١٥ = ٩٧° ٣٠ ، أى أن الشمس تشرق الساعة ١٣ : ٨

دقيقة ساعة

صباحا وتغرب الساعة ٤٧ : ٣ مساءً ، فيستمر ضوء النهار نحو سبع ساعات ونصف تقريبا . وتختلف هذه القيمة بنحو ست دقائق عن تلك التي نجدناها في كتاب ويتكر . ويرجع هذا الاختلاف إلى تقربنا إلى إجراء العمليات الحسابية وإلى أسباب أخرى لا نهتمنا الآن لآلتنا ، كما نرى ، سيوف لا نجد صعوبة ما في التخلص منها عند ما نفهم الأسس الرئيسية .

ويمكننا تطبيق نفس القانون في إيجاد وقت شروق أو غروب الشمس في ٢١ يونيو عند ما يتبادل طول النهار والليل . وكما أشرنا في تمرين ١٠ ، نألياب الشمس . وكما سدرس في الفصل في نهاية هذا الباب

حا = ( ١٨٠ - ١ )

ولذا ٨٣٧٣ ، إما أن تساوي جا ٥١° ٥٦° ، ولما أن تساوي جا ( ١٨٠° - ٥٦° ) .

ويمكننا أن نحكم من الشكل على القيمة التي نأخذها . فأى نجم على دائرة المعدل يشرق نحو الشرق . يتحرك ٩٠° حتى يصل مستوى الزوال . والنجم الذي يقع جنوب دائرة المعدل يتحرك أقل من ٩٠° ، أما النجم الذي يقع شمال دائرة المعدل فيتحرك أكثر من ٩٠° . ولذا إذا كان ميل الجسم السماوي شمالا ( كما في حالة الشمس يوم ٢١ يونيو ) فإننا نعتبر الحل جا ( ١٨٠° - ١ ) . أما إذا كان الميل جنوبا فإننا نعتبر الحل جا ( الزاوية السمتية عند شروق )

أو غروب الشمس يوم ٢١ يونيو هي ( ١٢٣° : ١٥° ) ساعة = ١٢ : ٥٨

دقيقة ساعة

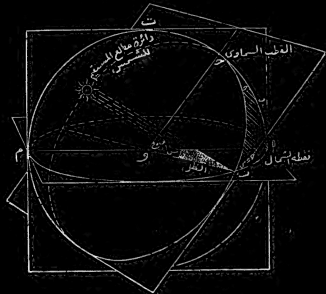
دقيقة ساعة

أى أن الشمس تشرق الساعة ٤٧ : ٣ صباحا وتغرب الساعة ١٣ : ٨ مساءً .

نظرية المذولة : ( Sundial )

أما المال الأخير الذي نستخدم فيه المثلثات الكروية فهو ما أصبح الآن وسيلة لتزيين الحدائق . فالمذولة ( الساعة الشمسية ) التي نراها في الحدائق أو

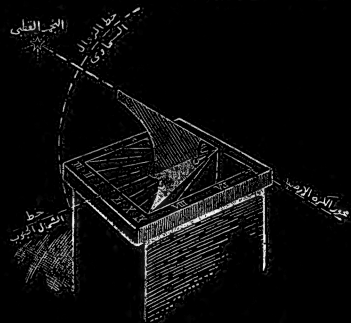
وقد أدرك فلنكيو العرب أنه يمكن تصحيح ذلك الخطأ بوضع محور ساعة الظل بحيث ينطبق على المحور القطبي للكرة الأرضية . فعند ما يوضع المؤشر ( انظر شكل ١٢٧ ) بحيث يرى النجم القطبي على امتداد الحافة العلوية يمكننا تدريج القاعدة إلى أقسام تناظر فترات متساوية في جميع فصول السنة ، أى أن مؤشر الزولة يوضع في مستوى الزوال بحيث يعمل على المستوى الأفقي زاوية تساوى خط عرض المكان الذى تستخدم فيه الزولة . وإذن فالزولة التى تكون مضبوطة فى سبيل حيث ازدهرت جامعة عربية فى القرن العاشر ، لا تكون مضبوطة فى لندن .



شكل (١٢٨) مثلث الساعة الشمسية

على جذوران الكنائس القديمة العهد في أوروبا هي اختراع يعتمد على نفس الأسس التي يعتمد عليها الدوائر العظمى التي تبخر عليها السمن .

وأول من ابتكر المزاولة العرب الذين تقدموا بفتحاً واسعاً في دراسة حساب المثلثات الكروية وهي تختلف كل الاختلاف عن ساعات الظل القديمة العهد، فساعة الظل القديمة العهد، أي المسية، يتركب من عمود رأسي يوضع في بعض الأحيان فوق قاعدة حجرية مستديرة الشكل، والزاوية التي يقصمها ظل عمود رأسي مع خط الزوال هي الزاوية السبعية الشمس (شكل ١٣)، والزاوية السبعية التي يتحركها الظل عند ما تتحرك الشمس زاوية معينة تختلف باختلاف الوصول إلى توقيت على ديل الشمس، وإذن لم تكن نسبة طول ساعة العمل مقيدة ببساطة ساعة الظل، إلى طول اليوم، ونسبة ثابتة لكل أيام السنة، فليكن هناك علاقة ثابتة بين توقيت العمل وتوقيت الصائكين ببساطة الساعة الزاجية أو الساعة المائية.



الشمس في أي يوم فإن الشمس تبدو أنها تدور حول المحور القطبي حيث تتقاطع  
مستويات الدوائر العظمى التي هي مطالع المستقيبات للشمس. ولنفرض مثلاً  
أن الشمس قد تحركت زاوية ساعده جـ أي شعاع يقابل حافة المؤشر يقع  
بأ كمله في مستوى الدائرة العظمى التي هي مطالع المستقيم للشمس. ويقطع هذا  
المستوى المستوى الأفقي في الخط المستقيم الزاويل بين الزايد، والقطعة التي  
تقطع فيها دائرة مطالع المستقيم للشمس الدائرة العظمى الواقعة في المستوى  
الأفقي. ونقوس جـ ب فوس الدائرة الأفقية بين هذه القطعة وخط الزوال، ونقاس  
بالزاوية المستوية في التي يتحركها الظل عندما يتحرك الشمس زاوية ساعده جـ  
فإذا كانت جـ لها نفس القيمة فإن جـ ب = ف لها نفس القيمة أيضاً. أي أنه  
عندما يتحرك الشمس زاوية قدرها س من الساعات بالوقت الشمسي  
(١٥ س<sup>١</sup>) فإن الظل يتحرك زاوية ف لها نفس القيمة في الصيف والشتاء.

ولكي نصنع موزلة نضع مؤشراً في مستوى الزوال بحيث يشير طرفه  
الأعلى إلى الشمال ونميل حافته العليا على القاعدة بزاوية ب تساوي خط عرض  
المكان الذي نستخدم فيه الموزلة. وكل ما ينبغي إذن هو تدريج القاعدة إلى  
ساعات. ويمكننا أن نتسلق في إحدى الأجزاء الصغيرة باستخدام حساب  
الثلثات في تدريج مثل هذه الموزلة. ولو تذكر الآوريون أن نظرية الموزلة  
قد وضعها هاتشو أسبانيا المولود في الوقت الذي كانت فيه شعوب بريطانيا  
وألمانيا شعوباً مجنونة تقطن عششاً من الطين ويحكها جماعة من الفسارسة الجبهة  
والبارونات اللصوص يغلغلو عن أنفسهم نوع الكبرياء والغرور الذي أصاب  
العاصمين البيض الذين غرؤوا كينيا، والجنرال هير تسوج، والرسل الذين قيدوا  
حرة أدمجة وقادة الحركة الاشتراكية الألمانية.

وتعتمد طريقة تدريج القاعدة على قانون ثالث لحل المثلث الكروى.  
في شكل ١٢٨ نرى أن المثلث الكروى ب ح قائم الزاوية وذلك لأن  
مستوى الزوال عمودي على المستوى الأفقي، فالزاوية ب التي بين المستويين هي  
زاوية قائمة. والأجزاء التي تهتمنا في هذا المثلث هي جـ الزاوية الساعية للشمس  
جـ ب ف زاوية الظل ب ف = خط عرض المكان. والزاوية الأخيرة  
مطلوبة، والزاوية الأولى يمكن الحصول عليها، أما الزاوية الثانية فهي التي نريد

حسابها حتى نضع علامات التدريج التي تناظر قيم جـ التي نديرها. أي تناظر الزمن.  
إذا كانت ١ = ٩٠° فإن جـ ١ = ١ وبأخذ القانون الثاني في حالة المثلثات  
القائمة الزاوية الصورة

$$(١) \quad \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \dots$$

٦ جـ ٩٠° = صفراً أي بأخذ القانون الأول الصورة

$$(٢) \quad \text{جـ} = \text{جـ} \dots$$

ولإذا طبقنا القانون الأول على الضلعين آ ب و الزاوية المحصورة جـ ب

$$\text{جـ} = \text{جـ} + \text{جـ} \dots$$

ومنها

$$(٣) \quad \frac{\text{جـ} - \text{جـ}}{\text{جـ} - \text{جـ}} = \dots$$

ومن (١) (٢) (٣) نحصل على

$$\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \times \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \dots$$

$$\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \dots$$

ويضرب الطرفين في جـ

$$\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \dots$$

وبالتعويض عن جـ من (٢)

$$\frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} = \frac{\text{جـ}}{\text{جـ}} \dots$$



$$\begin{aligned}
 & \frac{\text{جا ح} \times \text{جا ب}}{\text{جتا ح} - (1 - \text{جتا ب})} = \\
 & \frac{\text{جا ح} \times \text{جا ب}}{\text{جتا ح} \times \text{جا ب}} = \\
 & \frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}} = \\
 & \text{طا ح} =
 \end{aligned}$$

وإذن .

طا ( زاوية الظل ) = جا ( خط عرض المكان )  $\times$  طا ( الزاوية الساعية ) .  
 فنلاحظ عند تأريخ مرسولة بحيث تكون مصبوبة في لندن تحصل على الزاوية التي  
 تصنع علامة تناظرها بظلها عند الساعة ٢٠ : ٣٠ بعد الظهر أي عند  
 ما تساوي الزاوية الساعية ٣٤ ساعة  $24 \times 15 = 374^\circ$  ، بأن نضع

$$\begin{aligned}
 & \text{طا ( زاوية الظل )} = \text{جا ح} \times 374^\circ \\
 & 7826 \times 7673 = 6005
 \end{aligned}$$

وباستخدام جداول الظلال ، طا  $31.9 = 60.9^\circ$  ، طا  $30.9 = 985^\circ$  ،  
 وإذا نمر زاوية الظل  $60.9^\circ$  مقربة إلى أقرب جزء من عشرة من الدرجات ،  
 ويعدنا بالميل لجزء باقي التدرج .  
 وإذا كبس التدرج مرسولة في الجيرة مثلاً فإننا نضع ح  $30^\circ$  موضع ح  
 ( خط العرض ) .

### النسب المتناسبة للزوايا الكبيرة :

عند استخدام القوائين التي حصلنا عليها في هذا الباب ، نشأ لنا عدة نقط  
 لم ندرسها بعد ، وقد ذكرنا إحدى هذه النقط عند ما درسنا وقت شروق  
 وغروب الشمس في يوم الاثنينين . النسبة الجيوبية على الألف بعد ١٨٠  
 على النسبة الجيبية ، فإذا كانت الزاوية الحادة الحجم مقسمة من النسبة

تساوى فهي تساوى ( ١٨٠ - ح ) مقسمة من النسبة الجيوبية . وقد سبق أن  
 رأينا في حساب المثلثات المسنونة بالباب السادس أنه إذا كانت الزاوية من  
 المثلث أقل من  $90^\circ$  فإن

$$(1) \quad \text{جتا ح} = \text{جتا ب} + \text{جتا ج} - \text{جتا ج} \times \text{جتا ب}$$

أما إذا كانت  $90^\circ < 1$  فإن

$$(2) \quad \text{جتا ح} = \text{جتا ب} + \text{جتا ج} + \text{جتا ج} \times \text{جتا ب} \quad (1 - 180) \dots$$

وإذا كانت الزاويتان  $90^\circ$  ب كل منهما أقل من  $90^\circ$  فإن

$$(3) \quad \frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}} = \frac{\text{جا ب}}{\text{جتا ب}} \dots$$

أما إذا كانت إحدى الزوايا في هذا المثلث المستوي أكبر من  $90^\circ$  فإن

$$(4) \quad \frac{\text{جا ح}}{\text{جتا ح}} = \frac{(1 - 180)}{1} \dots$$

فإذا اصطحبنا على أن جتا ( ١٨٠ - ح ) تعنى نفس الشيء الذي تعنيه  
 - جتا ح ( أو أن جتا ( ١٨٠ - ح ) تعنى نفس الشيء الذي تعنيه جتا ح )  
 فإن القاعدة (١) تشمل أيضاً القاعدة (٣) وبالمثل إذا اصطحبنا على أن جتا  
 ( ١٨٠ - ح ) تعنى نفس الشيء مثل جتا ح فإن القاعدة (٢) تشمل القاعدة (٤) .  
 سواء كانت كل زاوية في المثلث لا تزيد عن  $90^\circ$  أو زادت إحداها عن  $90^\circ$  .  
 وإذا اتفقا على ذلك فإننا نقول أن جتا  $45 = 70.71$  ، جتا  $35 = 135$  .  
 - ٧٠.٧١ ، وإذا كان جواب مسألة جتا  $1 - 70.71$  ، وكما نرى من  
 الجدول أن جتا  $45 = 70.71$  ، فإننا نستخرج  $1 - 180 = 45 - 135$   
 بالميل ح  $30$  لها نفس القيمة مثل ح  $150$  (  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$  ) والقيمة في المعطاة في  
 جدول الجيوب للزوايا من صغر إلى  $90^\circ$  باعتبارها ح  $30^\circ$  يجب أن تقرأ  
 ح  $30^\circ$  أو ح  $150^\circ$  .

نلاحظ إذن قاعدة واحدة لإيجاد ديل الحجم ، هذه القاعدة ، إذا كانت  
 الزاوية المسمية تقاس دائماً من النسبة الجيوبية سواء كانت أكبر أو أصغر  
 من  $90^\circ$  هي :



نوقت جرينتش (مسألة)

البد السق قس (من الجرب)

١٢,١٨

٧٤٧

١٢,١٩

٧٤

١٢,٢٠

٧٤

١٢,٢١

٧٣٦

١٢,٢٢

٧٣٦

١٢,٢٣

٧٤

١٢,٢٤

٧٤٦

أوجد خط عرض وخط طول ذلك المكان . ( انظر ذلك المكان على الخريطة ) .

(٤) أوجد بوجه التقريب مقلع مستقيم الشمس يوم ٢٥ يناير . من ثم

دقيقة ساعة

أوجد بالنوقت المحلي زمن غروب الدبران . ( مقلع المستقيم ٣٢ ٤ ) مستوى الزوال ، ذلك المساء .

وإذا سجل كرونومتر السيفية الزمن ١١,١٥ مساءً ، عند جرينتش فأوجد خط طول السيفية .

(٥) إذا كان ميل الدبران ١٦° شمالاً ( مقرباً ١° ) أقرب درجة ( وارتفاعه عند غروبه مستوى الزوال ٦٠° فوق جيوب الأفق فأوجد خط عرض السيفية .

(٦) مقلع المستقيم نجم ٢٤ في الدب الأكبر هو ١١ ساعة بوجه التقريب وميله ٦٢° شمالاً ، ويغرب النجم مستوى الزوال على بعد ٤١° ٤ شمال حيث

دقيقة ساعة

الرأس ، يوم ٨ أبريل الساعة ١٠ : صباحاً ، حسب كرونومتر السيفية ، عين موضع السيفية .

(٧) افترض أن حصداً قد استبعد إلى جزيرة ما وليس معه إلا ساعة يد وتوقيت وينكر . فإذا ضبط ساعة وقت الظهر بمشاهدة ظل الشمس ووجد أن النجم ٥٥ في الدب القطبي كان في العبور السبل نحو الساعة ١١ مساءً ، فكيف يمكنه أن يستنتج التاريخ بالتقريب ، إذا كان قد نسي عدد الأيام التي مضت ؟

قبل أن يبدأ في دراسة هذا النوع من الهندسة نلفت نظر القارئ إلى نقطة هامة أخرى . عند ما كنا نرسم أشكالاً نوضح بها نظريات الهندسة الإقليدية ربما كنا نتخيل أرشميدس وهو يرسم الأشكال المستوية في الهندسة الإقليدية على الرمال قبل أن تقتله الجنود الإطاليون أننا نترك الآن أرشميدس كان في الواقع يرسم مثلثات كروية على سطح الكرة الأرضية . والسبب الوحيد في أن الهندسة الإقليدية تبدو حاجة الرسامين والمهندسين هي أن أبعاد هذه الرسومات والمباني صغيرة جداً إذا قورنت بنصف قطر الأرض . والواقع أنه إذا نحن التمسرينا في مد خط مستقيم عبر المحيط فإننا نجد أنه ليس خطاً مستقيماً بالمعنى المقصود في الهندسة الإقليدية . وداخل المحيط المحدود من الفراغ الذي يحيط بمجموعتنا الشمسية يعتبر شعاع الضوء لجميع الأغراض العملية خطاً مستقيماً بالمعنى المقصود في الهندسة الإقليدية إلا أنه عند ما نقول إن الضوء ينتشر في خطوط مستقيمة إلى أبعد السم فإننا لانعني حينها أن الضوء ينتشر في خطوط أفلبس المستقيمة .

## اختبارات على الباب الثامن

(١) أوجد ميل الشمس ومطلع مستقيماً في كل من الأيام ٢١ مارس ٦٠ ٢١ يونيو ٢٢٦ سبتمبر ٢١ ديسمبر .

(٢) أوجد بوجه التقريب مقلع مستقيم الشمس في الأيام ٤ يوليو ٤ أول مايو ٤ أول يناير ٥ نوفمبر . ( ابدأ بأحد هذه الأيام واعتبر الأيام الأخرى مرتبة تسبقه وأخرى تتلوها ) ثم كرر العمل مبتدئاً بكل واحد من الأيام الثلاثة الأخرى . حقق النتائج من توقيت وينكر .

(٣) باستخدام استرولات متولى ( شكل ١٢ ، الباب الثاني ) ، حصل على القراءات الآتية ، في مكان ما يوم ٢٥ ديسمبر .

٤٢ ١/٢ من الجنوب

٩٩٠ م.ا.

منكب الجوزاء

○ $\Delta$  $\frac{1}{4}$

8. 1, 2, 3

رجل الحمار

7V 1/2

2. 1. 1.

الشعري الحانية

أوجد الميل ومقطع المستقيم لكل نجم وقارن النتائج التي تحصل عليها مع الجداول في تقويم ويشكر (صفحة ١٤) (لاحظ أن التوقيت المتوسط عند جريتش يختلف عن التوقيت الشمسي الحقيقي مقياساً من الظاهر عند جريتش. إلا أن هذا الاختلاف لا يتجاوز دقائق معدودة. وقد دوت جداول هذا الفرق لكل يوم من أيام السنة. في تقويم ويشكر أي التقويم الفلكي الرياضي: فمثلاً في اليوم الثامن من شهر فبراير يكون الظاهر الحقيقي متد جريتش بعد الظاهر بتوقيت جريتش المتوسط بمقدار ١٤ دقيقة).

(١٥) بالاستعانة بالنجم أثبت أنه إذا كانت الزاوية الساعية في النجم هي الزاوية التي يجرها النجم مثل عبوره مستوى الزوال (وإذا كانت في سالة فهي الزاوية التي يجب أن يجرها النجم حتى يعبر مستوى الزوال) فإن

مطلع مستقيم النجم ( بالساعات ) = مطلع المستقيم للشمس ( بالساعات )  
 - ( الزاوية الساعية بالدرجات ÷ ١٥ ) + الزمن المحلي ( بالساعات ) .

(١٦) بالاستعانة بخريطة موضحة على أبعاد المحطات أحسب المسافات مقببة على دوائر عظمى بين الموانئ المختلفة التي تربطها طرق بحرية مباشرة. أوجد المسافة بين لندن ونيويورك، وبين لندن وموسكو، وبين لندن وإيفر بول.

(١٧) في السادس والعشرين من شهر أبريل، عندما كان مطلع المسقيم  
دقيقة ساعة

للمشمس ١٣ ٢ حصل على القراءات الآتية ، بواسطة آلة منزلية

الزمن المحلي

اليوم الثماني

الزاوية السميّة

٩.٤٨ م.م.أ

50

شرب الجوز

## أسس التوأم المؤ

• 9.39

13

3

الب الأسد

12.00

51

• الشا

سالك الرامح

(٨) في غرة أبريل عام ١٨٩٥ كان مطلع المستقيم للقمر ٣٣ ساعة، ٤٨ دقيقة. أوجد بالتقريب شكله، ووقت شروقه، ووقت غوره ذلك اليوم.

(٤) إذا غلبت أن الشمس والذب الأكبر قد شوه هذا المعاملة ٣٤ ساعة متتالية مرة واحدة في السنة في موضع ما على خط زوال جرينتش ، فكيف تعين المسافة من لندن إذا غلبت أيضاً أن قطر الكرة الأرضية يساوي ٨٠٠٠ ميلاً وأن قطر عرض لندن ٥١° ؟

(١٠) إذا علت أن ظل الشمس في مكان ما ينعدم في ظهر أحد أيام السنة يتجه جنوباً في ظهر كل يوم آخر فأوجد بالأميال بعد ذلك المكان عن قطب الشمال.

(١١) في غرة يناير وصلت الشمس إلى أقصى الارتفاع لها في السماء الساعة ١٢:١٧ مساءً وقد كانت عندئذ ١٦° فوق جنوب الأفق، وفي أي جزء من جبهة الماء

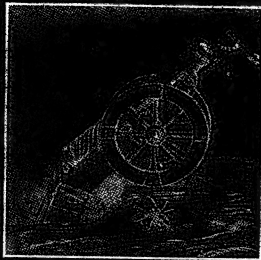
(١٢) مطلع المستقيم لمكب الجوزاء، وميله، هما على الترتيب ٥٠ ٦ ٥٠ ٧ ٥٠ دقيقة  
علا فإذا كانت غرة النوم تطل نحو النور ويذهب شخص النوم كل مساء  
تمام الساعة الحادية عشر، فيبقى أي وقت من السنة يرى هذا الشخص  
لمكب الجوزاء مشرقا عندما يذهب للنوم ؟

(١٣) في اليوم الثالث عشر من ابريل عام ١٩٣٧ كان أقصر طول لظل  
ود مساويا لارتفاعه ، ومتجه نحو الشمال ، وقد كان ذلك عندما بدأ  
دقيقة ساعة

وحرّام الإذاعة في الساعة ١٠ : ١٢ بعد الظهر ، فتى أى مملكة قد أخذت  
هذه القرارات .

(١٤) باستخدام الاسترولاب المنزلى حصل على القراءات الآتية فى أنس (Penzance) (خط عرض ٥٠° شمالا وخط طول ١٠° غربا) فى ١٠ الثامن من فبراير.





## الباب التاسع

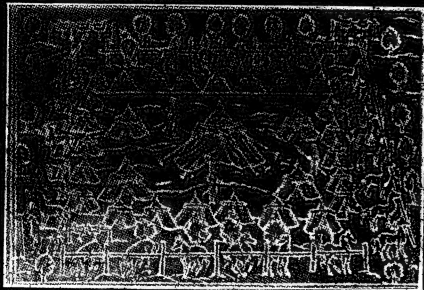
هندسة عصر النهضة

أو

ما هي المتحنيات ؟

كان المنهج الرياضي لجامعة أكسفورد في القرن الرابع عشر يحوى مسألة وقطرة الجبر ، غير أن الطلاب يقف عبيدها دون الوصول إلى أية نتيجة . وكانت نهاية المنهج هي الفرض الخامس في كتاب إقليدس الأول من الأثنى عشر كتاباً . ولم تقف دراسات الدول الإسلامية عند إحيات الترانس اللغوية بل تعدتها إلى كثير من الدراسات العدائية . أما في أوروبا فلم تكن الحالة كذلك ، إذ كانت الدراسة وفقاً على رجال الدين كما كان حال الكهنة في عهد قدماء المصريين والسبعون التي سكنت وادي النيل . وفي مبدى القرون الأربعة التي تلت ذلك ، لم يزد الأوروبيون إلا القليل عما تعلوه من الأقدمين حتى جاء العهد الجديد بنمايراته التي دفعت الرياضيين للبحث في نظريات جديدة في أواخر القرن الخامس عشر ، وكانت أول هذه العوامل المؤثرة هي صناعة الساعات المحمولة على عجل وتبعها إدخال المدنية في الحروب ومقاتلتها لمعداد الخرافات والمجادول الملكية للبلاحة ، كل هذا دفع الرياضيين للطور اجتماعيا واستحدثات الجديد من الفن وفقاً للأوضاع الحديثة :

وقد سبق أن استحدث الإسكندر يون والصليون جيلا مختلفة بدلا من الساعة الشمسية ) منها الساعات المائية التي كانت تدير بالمرار الماء وكان أساس عملها كذلك ان وجوده في شكل (٢) ، أما الساعات التي تدار بواسطة العجلات فأستحدثت جديد بدأ في أواخر القرن العاشر . وكانت الحساسة القروية في أوروبا الشمالية ، كما يذكرنا اشتقاق كلمة ساعة من كلمة جرس الفرنسية (Cloche) وكذا رجال الدين الذين تعودوا دق الأجراس في الأديرة



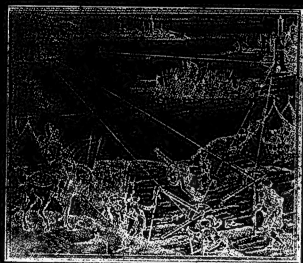
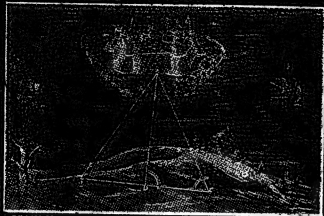
سكيل (١٢٠٠)

في الصورة العليا يظهر تاريخيا ، الرياضي العظمى في العصور الوسطى ، ارياسته فليشن الحربية وذلك في كتاب نشر في البندقية سنة ١٥٤٦ والصورة السفلى هي اقتباسية كتاب « بولس من الحسابات الحربية » مؤلفه الأخوان ويجز وقد نشر في لندن سنة ١٥٧٢

مرتطة حياتهم باستغلال التربة كما فعل زملاؤهم حول النيل المقدس منذ آلاف السنين، وورثت الكنيسة المسيحية عنهم علمهم الاجتماعي السابق، وكانت الساعات الشمسية تدلهم على عبادتهم وأعياد ميلادهم واستعملت القناديل والشموع والساعات المائية، وبدأت الإدارة الموزعة في أواخر القرن العاشر في استعمال الساعات التي لها عجلات تدار بواسطة ثقل خاص وكان في كنيسة سانت بول في لندن إحدى الساعات في سنة ١٢٨٦ ميلادية، ولم تكن الساعات الميكانيكية تعرض للبيع لاستخدامها في الوقت حتى أواخر القرن الرابع عشر. وكانت هذه الساعات في أول أمرها عبارة عن آلات بدائية ولم تكن من السهل تحديد الأوقات القصيرة إلا بعد أن اخترع جاليليو البندول، وكان تطبيق هذا المبدأ لتركيبة ساعات البندول في القرن السابع عشر، مثلاً فبدأ في الاكتشاف النظري الذي سبق التطبيق الصاعي قبل عهد الكبير بله والأصباغ الكيميائية، ولم تكن الكرونومترات المستعملة في السفن البحرية قد استكملت وقتها في تحديد خطوط الطول، حتى اخترع إيزنبرك بعد قرن ولو أن جارجير (فريريس) الرياضي الهولندي ابتكر الطريقة المذكورة في الباب الرابع ص ١٦٩ عام ١٥٤٠ ميلادية.

وكانت نظرية البندول هي بدء فتح جديد في الميكانيكا، وهي ميكانيكا الحركة المقابلة لميكانيكا التوازن في الاستكديرة، وبدأ أول تطبيق جدي للاكتشافات الميكانيكية في الأعمال الكبيرة في معسكر الأكاديمي الأكبر باستعمال المنجنيق، وتبع ذلك مباشرة التقدم النظري لميكانيكا التوازن على يد أرشميدس وقلا مبيده، واستعمل المدلولون، الذين غرخوا هغماريا وبولندا عام ١٢٤١، البارود، وأوجد استعمال المدفعية في الحروب الأوروبية في القرنين الرابع والخامس عشر نوعاً جديداً من المسائل الميكانيكية، وهي حساب موضع جسم سريع الحركة يمكن دفعه لمسافات بعيدة كما ساعدت ساعة البندول على عمل جهاز لقياس فترات الزمن القصيرة جداً التي يمكن تسجيلها قبلاً. وفي بحر قرن بعد اختراع الورق أمكن طبع دفاتر تعليم العلوم

Genoma Regnier (Frisius) (١١)



شكل (١٣٥) في

الساعات البحرية

بين هذه الصور الأربع المأخوذة من كتاب في كيف أن جاليليو ابتكر الساعة الميكانيكية  
فيها في التسمية ما بين جيمس وجاليليو الصورة العليا هي من كتاب (إلياريا) لـ (بولونا)  
سنة ١٦٥٥. والصورة التالية مأخوذة من عمل ريل من الأدوات الهندسية (١٦٠٧).

المسكونة مبينا فيها طريقة استخدام حساب المثلثات لحساب بعد هدف ما برصد زاويتين كما في شكل ١٣٠. ٦. ١٣٠.

وبذلك كان الرياضى المحترف على ظهر السفن البحرية المجهزة بالمدافع في رجلائه الاستكشافية الكبيرة في القرن السادس عشر، على علم بأكثر من طريقة واحدة لتعيين الموقع والزمن وتكافئت ثلاث عوامل اجتماعية جديدة في أن تحل الهندسة القديمة مكاناً بارزاً في هذا الوسط الاجتماعى حيث أمكن الوصول الى حل، فدرس الفلكى الراحل في سفن هزى الملاح تعاليم بطليموس التى بقيت بعد تدمير الدراسات العربية، فأستعمل خرائط مسطحة عليها خطوط عرض متوازية كما أشارت أحيانا الى خطوط الزوال الطولية، وكان أهل الترويع على علم بمجراه الشمس إلى الجنوب، « South pointing »

الذى استعمله الصينيون لأكثر من ألف سنة. وعندما بدأت معامرات البادة التجار، تحسنت البوصلة البحرية وأصبح لها قيمة عالية وعملية. وقد نتج عن تطور البوصلة ورسم الخرائط كل العوامل الضرورية للهندسة التى بدأ تطبيقها زينه ويكارت<sup>(١)</sup> على المعادلات النظرية وذلك في أوائل القرن السابع عشر، وعندئذ فاقبت دراجة المنجناب استعمال المسطرة والبوصلة وصنفا أفلاطون والعلماء كوبرنيكوس<sup>(٢)</sup>، ونيكو براها<sup>(٣)</sup>، وكبلر<sup>(٤)</sup> وجاليليو<sup>(٥)</sup>، وقد تسلم الاثنان الأخيران بجهاز التلسكوب ( قاموا بعمل قياسات جديدة بحجمية المدارات النجوم متبعين مواءمها في شكل بياني أو خريطة.

وعلى عكس تآلم أفلاطون التى تشير إلى تحرك الأجسام السماوية في دوائر كاملة نظراً لأن الدائرة هى الشكل التام الصحيح. ظهر أن الكواكب تتحرك في قطاعات ناقصة، سبق أن درسها العالم أبولونيوس<sup>(٦)</sup> من برعا بواسطة تركيبات أفلبس المبينة على القطاعات المائلة للخرائط، وقد حل فينلا غير الخيام معادلات الدرجة الثالثة باستعمال القطاعات المخروطية. وقد وضع

Kepler	(١)	René Descartes	(١١)
Galileo	(٢)	Copernicus	(٦)
Apollonius of Perga	(٥)	Tychu Brane	(٢)

مارينوس<sup>(١)</sup> ومعاصره بطليموس خرائط عليها متوازيات من خطوط الطول وخطوط العرض. وكما استعمل البارود للألعاب النارية قبل انتقاله للحروب، كذلك عرّضت جميع اكتشافات الهندسة الكراترية للبعض في عهود سابقة لإستعمالها في الأجهزة التى أوجدت عهداً جديداً للاختراعات الرياضية.

ويشعر التلاميذ براحة عند الانتقال من إثباتات أفلبس إلى استعمال الرسم البيانى أو يعجب المفكرون لعدم اكتشاف بعض الأسس البيئية إلا بعد العناء والوقت الطويل، والخفيقة أن التقدم المنهري لا يتم إلا إذا فكر جماعات عديدة من الناس في الشيء الواحد، وربما لا تعجب كثيراً إذا علمنا أن الجهد والتكسول يحتاج كل منهما للآخر ولا يمكننا أن نبني مستقبلاً ذا تقدم ذهنى عال للجنس البشرى، متى توافقت حاجيات الإنسان العاوية مع حاجيات أهل التفكير النادر. وكلما زادت الصفة التجريدية للرياضة كلما وصحت لنا العلاقة بين الحالة الفكرية والأسس الاجتماعية، فقد أنتجت الحاجة الاجتماعية ساعة واستغنى بذلك عن البدع الكهربائية للكانتوليكية، فإن نجاح الحروب كل معقوداً لم كل أقوى في الاستعداد الميكانيكى وكذا الاكتشافات التى أغت طبقة التجارة بما فتحت لهم من آفاق جديدة، والاختراع الرياضى الذى مكّن من قياس حركة البندول ومدى سقوط قبلة المدفع وموقع السفينة في البحر ومساومات الأجسام السبابة - الموقع والقياس - يقع الاختلاف الأساسى بين الهندسة الكراترية وهندسة أفلبس في أن كل كمية (أو مقدار) لها أيضاً اتجاه أو موضع متصل بها، وعلى ذلك فليس الخط هو مجرد وحدات طولية. بل وحدات طولية عديدة مرسومة في اتجاه خاص بالنسبة لخطوط أخرى، وليست المساحة مجموعة من وحدات السطح بل هى الفرق بين وحدات عديدة من السطح في موقع ما ووحدات أخرى في موضع آخر (شكل ٥: ١). فإذا قبل إن الخط يوصف باتجاهه وبمقداره فهو تعبير صحيح في لغة النحو



لأن جميع التكتيات في الهندسة الكارتيزية لها إشارة متصلة بها  $\pm$  أو  $-$  تشير إلى الاتجاه التي تقاس فيه . واستعمال العلامات بمعنى الجهة أو الموقع هو تطبيق بسيط لاستعمالها البدائي الذي يعنى الجمع أو الطرح وربما كان من السهل استعمالها بهذا المعنى في أى وقت في الثلاث آلاف سنة التي سبقت ديكارث لو كان تطور الرياضة مستقلاً حقيقة عن الإرث الإجماعى .

ولفيسير كيف ينشأ هذا بصورة طبيعية من الجمع والطرح ، ستقتصر أول الأمر على دراسة الحركة في خط مستقيم . بين شكل (٣) طريقاً مستقيماً يبدأ شرقاً وغرباً من فندق قديم في قرية إنجليزية ويسمى بادجر وباجبيس <sup>(١)</sup> . وتقع كنيسة القرية على بعد ٤٠٠ ياردة من الجهة الشرقية كما يوجد فندق ثان على بعد ٤٠٠ ياردة من الجهة الغربية ، ولنفرض أن سائحاً قام بعد استراحة في الفندق الأول فأصداً حضور القداس بالكنيسة ، إذن كل خطوة بخطورها تضيف ياردة إلى المسافة التي يقطعها شرق الفندق وتكون المسافة المقطوعة عند وصوله إلى الفندق هي :

٤٠٠ ياردة

والآن دفعه الطمان إلى العودة إلى الشراب ، فإذا قطع ٣٠٠ ياردة عائدنا إلى أى في الاتجاه الغربى فأموضعه الآن ؟ باستعمال طريقة الرموز ، أكن القول بأنه على بعد

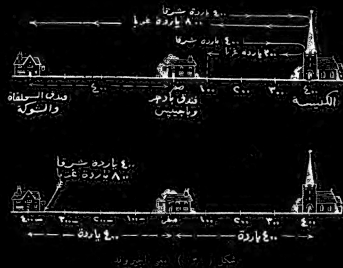
$$٤٠٠ - ٣٠٠ = ١٠٠ \text{ ياردة}$$

من المكان الذى بدأ منه السير . أى أنه قطع ٣٠٠ ياردة من المسافة الشرقية بين مكانه الاصل والكنيسة وإذا استمر في السير ١٠٠ ياردة أخرى ، تكون المسافة بينه وبين الفندق هي :

$$٤٠٠ - ٤٠٠ = ٠ \text{ صفر ياردة}$$

(١) The Budger and Bagpipe

أى أنه سيكون في مكانه الذى بدأ منه السير ، لكنه ربما تذكر عندئذ خلاوة البيرة بالفندق الثانى والسيجارة والشوكة .



فإذا استمر في السير ٤٠٠ ياردة متجا غرباً فإنه يصل إلى الفندق الثانى وكأنه قطع ٨٠٠ ياردة من قيامه من الكنيسة . وإذا اتينا ما ذكرناه سابقاً وجدنا أن المسافة التي قطعها من نقطة الأصلية هي الآن

$$٤٠٠ - ٨٠٠ = -٤٠٠ \text{ ياردة}$$

إذن لمعرفة مكانه الأخير بما علينا من حركاته ، وجب أن نكتب ٤٠٠ ياردة غرب المكان الذى بدأ منه في الصورة  $- ٤٠٠$  متى كتبنا ٤٠٠ ياردة شرق المكان الذى بدأ منه في الصورة  $+ ٤٠٠$  ويكون معنى  $- +$  ، هو نفس معناها العادى وكذلك معنى  $-$  الجيروندى ، متى كان معنى التعبير  $- +$  هو من وحدات الطول شرقاً أو  $-$  من وحدات الطول مأخوذة إلى اليمين ، ومعنى التعبير



فإننا نحصل على مثلث قائم الزاوية بالتوصل بنقطة تقع رأساً فوق المركز  
في شكل ١٣٣. وحدة القياس هي ١٠٠ ياردة، وعلى ذلك فإن الكعبة على بعد  
٤٠٠ والفتد الثاني على بعد ٤٠٠ من الوحدات، عن المركز. فإذا كان ع  
هو الارتفاع أناسي، البعد الأول، البعد الثاني، فإن

$$ع = \sqrt{٤٠٠^2 + ٤٠٠^2}$$

في الهندسة الإقليدية لا نعبر الاتجاه مطلقاً وعلى ذلك

$$ع = \sqrt{٤٠٠^2 + ٤٠٠^2}$$

وإذا أردنا أن نضع ما فات إقليدس في الهندسة، وصلاً إلى نتيجة  
غيره وهي:

$$ع = \sqrt{٤٠٠^2 + ٤٠٠^2}$$

$$١ + ١ = \sqrt{٤٠٠^2 + ٤٠٠^2}$$

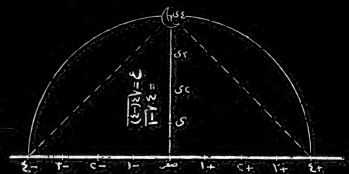
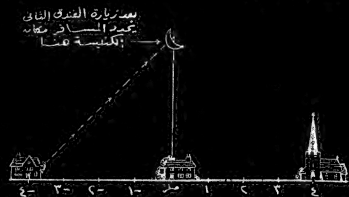
$$\sqrt{٤٠٠^2 + ٤٠٠^2} =$$

$$٤٠٠ = ع$$

وعلى ذلك ع من الوحدات أو أربع وحدات بجانبه تتفق مع موقع  
الكعبة بالنسبة لحال المسار، أو عبارة أخرى من الوحدات طولها  
٢٠٠ من الوحدات طولها ٢٠٠ من الوحدات ٢٠٠ من الوحدات طولها  
٢٠٠ من الوحدات وجنوباً مقبلة إلى أخلا في الهواء يتلأ من ٢٠٠ + ٢٠٠ + ٢٠٠  
شرفاً أو ٢٠٠ - ٢٠٠ - ٢٠٠ غرباً

وقيل أن تذكر مثلاً نوضح استعمال هذه اللغة الرياضية في وصف العالم  
الحقيقي (الباب العاشر من ص ٩١ إلى ص ٩٨) يحسن من باب المنة أن  
نستعيد مرقف أحد الرياضيين المختبرين المتأخرين اليونان، عندما كان من  
الصعب معرفة فائدة الأعداد التجيلية. هذا الرياضي هو واليس، فليكن يذاع  
عن اقتراحه بأنه يذكر أن نكدر هذه الأعداد التجيلية مثل ٢، ٣، ٤  
مبنى هندسي، وقارن واليس بينها وبين الأعداد السالبة فقال: ليس هذا العرض

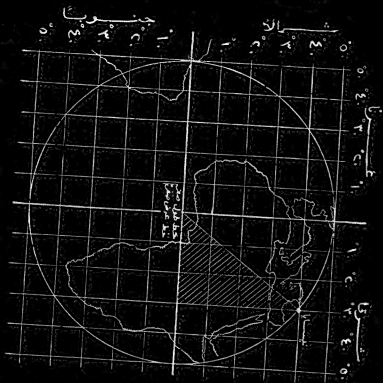
القمري في سمت الكعبة، ولذا هو يخفق في أداء صلاته، يفسر لنا معنى تعبير  
آخر هو  $\sqrt{١٠٠^2 + ١٠٠^2}$  أو كما نكتبه في صورة مختصرة  $\sqrt{١٠٠^2 + ١٠٠^2}$ ، ولنعرف بالذا بني  
ت: (أو  $\sqrt{١٠٠^2 + ١٠٠^2}$ ) من الوحدات مقبلة إلى أعلا نحو السماء حيث دفعه  
جباله، يجب أن تذكر نظرية أقليدس للوسط الهندسي (قارن بين شكل  
١٣٣ و ٦٤) من نظرية ٨ في الباب الرابع علينا أن طول العمود الساقط من  
الزاوية القائمة على الوتر يساوي الجذر التربيعي لحاصل ضرب جزئي الوتر  
الذي يقسمه العمود أما نظرية ١٠ فهي تبين أن المثلث الذي أحد أضلاعه  
قطر في دائرة والرأس المقابلة تقع على الدائرة هو مثلث قائم الزاوية. فإذا  
رسمنا نصف دائرة مركزها هو منتصف المسافة بين الفتد الثاني والكعبة،



شكل (١٣٣)

عديم المنفعة أو غير معقول متى فهم على حقيقته ، فمع أنه في الرموز الجبرية يأتي بكليات أقل من لاشئ ، إلا أنه عند التطبيق في الطبيعة يدل على كمية حقيقية كما لو كانت الإشارة + لكن تفسر بالمعنى المضاد ، وهذه الكميات الكبير رياضي كبروج في القرن السابع عشر تباينا غريباً مع كلمات هذا الزعيم الرياضي عند وفاته التي أشار فيها إلى أن جميع اكتشافاته الرياضية كان فيها تقع لأى إنسان ماعدا نفسه .

تطويع العالم — عندما يتينا كيف أن استعمال + ، - ، و في تعيين الاتجاه والموضع هو نتيجة طبيعة لطريقتنا الأولى لاستخدامها ، تركنا المسافرين بهم في الطريق على رجله وتركناه جراً يبحث عن السماء بالطريقة التي يسمع بها خياله . والآن دعنا نرى كيفية استعمالها في وصف حركات السفن في الطرق البحرية التي ليس بها موانع حتى يستطيع الملاح أن يسلك طريقاً مستقيماً . في شكل ١٣٤ يتينا عالم الملاحات الكبرى مسقطاً على موازيات العرض وخطوط دوائر الطول والأخيرة ليست متوازية على سطح الكرة إذ تتقابل جميعاً عند القطبين . ويقسم سطح الكرة بواسطة دوائر موازية للدائرة بخط الاستواء بحيث يكون عدد الدوائر فوق خط الاستواء ٩٠ دائرة وتحت ٩٠ دائرة ، وبذلك إذا انجبتنا من القطب الشمالي إلى القطب الجنوبي وعدنا مرة أخرى إلى مكان الانبعاث ، فإننا نقطع ٣٦٠ من هذه الدوائر . تسمى هذه الدوائر خطوط العرض أو ٣٦٠ درجة عرضية . وتقسّم الخطوط التي تفصل القطبين أى خط عرض مواز لخط الاستواء إلى ٣٦٠ جزءاً متساوياً أو درجة طولية من صفر إلى ١٨٠ شرق خط الزوال المار بمجرنتش ومن صفر إلى ١٨٠ غرب ، وإذا اعتبرنا شكل المسقط فان خطوط الزوال ترسم عادة متوازية مثل الخطوط المتوازية التي تناظر دوائر العرض ، أى كما لو كان العالم مسطحاً ، غير أن ذلك يؤدي إلى خطأ كبير في حساب المسافات الطويلة التي لا يمكن حسابها بهذه إلا باستخدام المثلثات الكروية كما جوهرين في الباب الثامن ص ٣٧٢ ، إلا أننا نصل في الوقت الحاضر هذا التصحيح ونعتبر العالم كما لو كان حققة مسطحاً .



شكل (١٣٤)

التي نعين موضعنا في البحر أو على الأرض ، يحتاج إلى نقطة ثابتة تناسب إليها جميع مقاييسها مثل قديم البادجر وقديم الباجيسر في المثال السابق . وتتخذ عادة في الملاحة نقطة عند خليج جييا حيث يوجد ما في كل مكان ولا شئ للشرب ، وهذا هو موضع خط دوائر جرنتش ، أعنى الخط الذي درجة طوله صفر ويقطع خط الاستواء (درجة عرض صفر) . هذا الخط هو مركز العالم في حساب الملاحين . يمثل شكل ١٣٤ دائرة مركزية نقطة تقاطع خط طول صفر ونصف قطرها بكناتي ، طول أو عرض ، وعلى ذلك تكون أقرب مدينة من هذه الدائرة هي مدينة بكناتي Bithynia .

(١٣٤) Nierer

والواقعة على خط طول  $30^\circ$  شرقاً وخط عرض  $40^\circ$  شمالاً تقريباً. وسنرى الآن كيف أن هذه المدينة التي لها اعتبارها لأسباب أخرى ستساعدنا في توضيح أن رسم الخرائط جعل من الممكن أن تجد الهندسة مع الجبر. وبعد مائة عام من هدم مدارس العلم في الإسكندرية بواسطة الرهبان، اختيرت مدينة نيسا مركزاً لأبحاث حسانية في جوارس العدد ثلاثة، والنتائج المعروفة لهذه الرعاية النادرة أكثر صعوبة في إدراكها عن جيل دول اللوغا. إننا نأتى الطبيعة. ولا شك أن لنا حظاً مضاعفاً في قدرتنا على تعلم الحساب التجارى لعدم الإصلاح بدلا من. هذه النتائج، إذا تطلبت عقوبة الإعدام للخطأ في استبعاد العقيدة النيسية الكثير من الصجاي. وفي القرن الثالث عشر انتقل مركز الإمبراطورية الرومانية من استنبول إلى نيسا نتيجة هجوم وقع من الصليبيين الذين اعتبروا أن طريقة تحليل العدد ثلاثة البيزنطية طريقة صالحة عن الدين.

إذا اعترنا خريطة شكل ١٣٤ حسب قيمتها الاسمية، فما هو بعد مركز العالم للحساب التجارى عن مركز العالم للحساب الفلكي إلى الإجابة عن هذا السؤال ليست بالصعبة، فالمستقيم (س) الواصل بين المركزين هو وتر مثلث قائم الزاوية، ضلعيه الآخرين هما  $30^\circ$  درجة طول، و  $40^\circ$  درجة عرض. فإذا كان محيط الأرض هو ٢٥٠٠٠ ميل، ودرجة واحدة عرض أو طول (عند خط الاستواء) يقابلها  $69\frac{1}{2}$  ميل، فإن طول ضلعي المثلث هما  $2091 \times 69\frac{1}{2} \times 40$  ميل. إذن حسب ما يمكن أن نسميه الآن نظرية البوصلة الصينية

$$s^2 = (69\frac{1}{2} \times 40)^2 + (69\frac{1}{2})^2 (40^2 + 30^2) =$$

$$1600 + 900 \sqrt{69\frac{1}{2}} = s$$

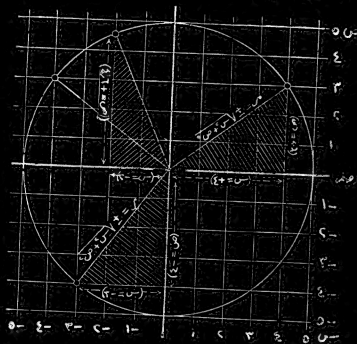
$$2500 \sqrt{69\frac{1}{2}} =$$

$$+ (50) \cdot 69\frac{1}{2} \pm =$$

$$\pm = 3.450 \text{ من الأميال}$$

والسؤال: كيف استطاع الصينيون أن يحسبوا هذا؟ ربما استخدموا طريقة

تذكرنا هاتين العلاقاتين في هذه الحالة بأن  $s$  هو المسافة بين المركز والمحيط لا تغير إذا قيس في اتجاه مضاد لآى مكان على محيط الدائرة في المحيط الأطلنطى الجوى. ونفسر لنا عملية الحساب البسيطة هذه كيفية وصف



شكل ١٣٤: خريطة العالم

بداية نقطة على محيط الدائرة التي نريد قطعها  $s$ . نتحقق العلامة  $s^2 = ص^2 + 3^2$  أو  $ص^2 = s^2 - 3^2$   $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$

أى أن  $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$   $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$   $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$

نرى إذا كتب  $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$   $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$   $ص = \sqrt{s^2 - 3^2}$

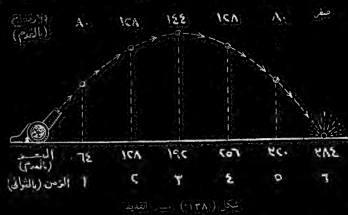
الآن، قام في مدينة صخر البهجة، فالخط التكرارى، لا يشبه الخط عسبد الإلياس الذى نسميه. في كل الحالات بالرغم من كونه في مواضع مختلفة، بل





البروتستانت. ولو أن ديكرات كصاحبه إرازمس<sup>(١)</sup> الذي وضع أسس دراسة  
الإنجيل البروتستنتية وساعد على تقديم المبادئ الحرة للعصر الأخير، مات قبل  
أن يفكر حقيقة العقيدة الرومانية.

ولم يتم الإصلاح بالدراسة الانجيلية وحدها، إذا كانت أوروبا عجزت عن الحروب  
التي لعبت فيها المدفعية دوراً هاماً، وكان عصر حطة البارود مدام الانتصار  
العسكري يتوقف على استنطاق فن جديد. وعندما استعمل المدفع لأول مرة  
في القرن الثالث عشر، كان الغرض منه القضاء على روح العدد المدمرة. واستخدم  
في القرن السادس عشر كآلة شديدة للدمار، وكانت الرعية في طلق المدفع



طالفاً يساعد على دفع القذيفة إلى مكان خاص وكيفية معرفة المسافة. سبباً في  
تطور العقيدة الرياضية في فن الحرب.

شكل ١٣٨ هو الرسم البياني للسالة الأساسية فهو يبين مسار قذيفة رأسياً  
وأفقياً. وليس من الضروري أن يكون مقياس رسم الارتفاع الرأسى مماثلاً  
لمقياس رسم المسافة الأفقية إذا كان ذلك مناسباً في الرسم وسعياً أن كل  
موضع للقذيفة المتحركة، مثل كل موضع للسفينة المتحركة، له إحداثيتان إلى  
أعلى مقبلة من سطح الأرض (+ ص) وتناظر خط العرض الشمالي والفرق  
بين الرسم البياني للقذيفة والخريطة العادية هو أننا أضفنا إلى المسافة شيئاً لم نحسب

Exercises (1)

عليه الخريطة، فقد وضعت الخرائط للسفن المختلفة التي تسير بسرعات متفاوتة  
لذلك لا يدخل الزمن في حسابها وتتم فقط بإظهار موضع السفينة. ولقد بينا  
في الرسم البياني للقذيفة الزمن الذي يمضي بين انطلاق القذيفة والمخطة التي  
تمر فيها بالنقط الأفقية المختلفة. المناظرة درجات الطول.

وعلى ذلك يمكن أن نغير الإحداثيات أية نقطة أثناء مسار القذيفة الآن:

(١) الارتفاع الرأسى = + ص ٦ المسافة الأفقية = + س

(٢) الزمن الذي يمضي بعد انطلاق القذيفة = + س

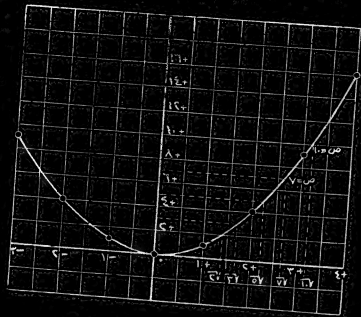
وبعبارة أخرى يمكننا أن نستفيد النظام الكرتيزي لتمثيل مرور الزمن  
كما في شكل ١٣٨ حيث وحدة القياس في محور الصادات يمثل ٦٤ ثانية، ووحدة  
القياس في محور السينات تمثل ثانية واحدة. نسمي هذا الشكل بالشكل  
المكافئ. ورسم القذيفة قطعاً مكافئاً. البسط كمعريف الرياضيين لمعنى  
الانطلاق في دماغ أم في الهواء. فبالرأى قريب جداً من القطع المكافئ. ولا بد  
من الأحداث بعض التصحيحات في استعمالنا القطع المكافئ الرياضي كنموذج  
الورق لرمه ماهر. ولقد أخذنا فيما في الشكل المرسوم لتوضيح التعريف  
الرياضي. ولكن كما في الجبل القذيفة فهو وصف تقريبي لما يحدث في العالم  
الحقيقي. ويوضع الفرق في جدول يمكننا أن نكون معادلة القطع المكافئ مرة أخرى  
بقليل من التجربة. لأعداد. وعلى ذلك نجد ما يأتي:

س	ص	س	ص	س	ص
٥	٠	٠	٠	٠	٠
١	١ 1/4	١	1 1/4	1 1/4	١ 1/4
٢	٢	٢	٤	٤	٢
٣	٢ 1/4	٣	٩	٩	٢ 1/4
٤	٢	٤	١٦	١٦	٢
٥	١ 1/4	٥	٢٥	٢٥	١ 1/4
٦	٠	٦	٣٦	٣٦	٠





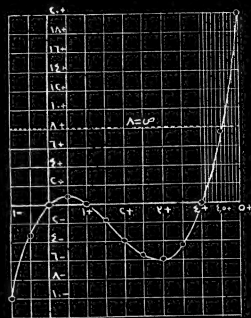




شكل (١٤٢) الطريقة البيانية لإيجاد الجذور التربيعية

من (الوزن بالأوقية)	مستوى الكفة (بالبوصات)	من (المسافة الممتدة بالبوصات)
صفر	٣	صفر
٢	٣,٤	٠,٤
٤	٣,٦	٠,٦
٦	٣,٨	٠,٨
٨	٤	١
١٠	٤,٢	١,٢
١٢	٤,٤	١,٤
١٤	٤,٧	١,٧
١٦	٥	٢

ومن مثل هذا الرسم يمكن قراءة المسافات المناظرة للأوزان المختلفة . إذا أردت ترقيم الأوزان على ميزان ذبنيكي ، فيمكنك أن تلاحظ أنه ابتداء من  $P=0$  إلى  $P=10$  بكرة الميزان خطاً مستقيماً ، وإضافة أوقيتين في هذا



شكل (١٤١) رسم المنحنى

من ٣ - ٥ - ٢ + ٤ = ١٠

واليك بعض الأمثلة

يوضح شكل ١٤٢ تمرر خط أو قطعة مرنة ، ويمكن إجراء التجربة في وضع دقائق إذا أن الزنبرك عبارة عن أبوية سميكة معلقة بواسطة سمار مثبت في رجل مائدة المطبخ ومعا مسطرة مقسمة إلى  $\frac{1}{16}$  من البوصة مثبتة إلى أسفل بواسطة دبابيس رسم أو سمارى برية . أما كفة الميزان فهي غطاء علبة طباقي ومعلقة بواسطة أربع نقوب يمكن عملها بمطارقة وسمار . وتستخدم في ذلك صنج الموازين المستخدمة في المطبخ . وبذلك نحصل على المنحنى من القراءات الآتية :

الخيز إلى الكفة (الفرق في ص = ٢) ينتج عنه امتداد قدره ٢، وبوصلة  
(الفرق في ص = ٢ > ٠) ، والآن معادلة خط مستقيم هي

$$\text{ص} = \frac{\text{الفرق في ص}}{\text{الفرق في س}} \cdot \text{س} + ١$$

إذن معادلة المنحنى في الفترة التي يكون فيها خطأ مستقيماً هي

$$\text{ص} = ١ (١) \cdot \text{س} + ١$$

ويمكنك إيجاد قيمة ١ بالتعويض عن س ب ص لاية نقطة واقعة بين  
ص = ٤ س = ١٢ ، مثلاً

$$\text{عند ما س} = ١٠ \text{ ص} = ١٢ \text{ أي أن}$$

$$١٢ = ١ (١) \cdot ١٠ + ١$$

$$١٠ = ١$$

وعلى ذلك فالمعادلة تأخذ الصورة

$$\text{ص} = ١ (١) \cdot \text{س} + ١$$

إذن يمكن جعل مقاييس لميزان يصلح لوزن أشياء ما بين أربع أوقيات  
وإثني عشر أوقية لدرجة كبيرة من الدقة ، وعلى ذلك نكتب علامة التدرج  
المناظرة لوزن قدره ٤ أوقية بمقدار (٤,٧٥) (١) ، و ٢ + ٤,٧٥ = ٦,٧٥ أي ٦,٧٥  
من البوصلة عن علامة الصفر . ولقد اكتشف هوك القاعدة أو القانون الذي  
يربط بين الوزن المستعمل ومقدار تمدد الزنبرك . وعول كان عاماً ، كبيره  
من معاصري نيوتن ، كرر كثيراً من وقته في عمل ساعة دقيقة تحتفظ بزم  
جربنفس في البحر وبذلك تكون وسيلة بسيطة لتعيين خط الطول . وهذا  
كان من الأسباب الرئيسية في أن الكشف عن قوانين صحيحة للحركة كان من  
الأهمية يمكن .

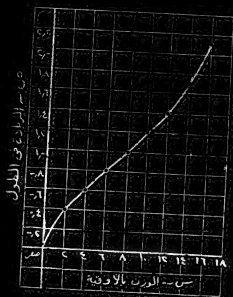
وإنك تلاحظ أن س ص ابتدأنا من الصفر وهذا يناظر طول الزنبرك  
إذا علمت به أوقيتان أي كالوزن الكفة أوقيتين . وثم س التي تناظر  
س = ٢ ٤ ٦ ٨ ١٠ ١٢ هي ٢,٤ ٤,٦ ٦,٨ ٩,٠ ١١,٢ أيضاً المعادلة التي تعين التمدد  
الناتج عن وزن لا يتعدى عشر أوقيات هي :

$$\text{ص} = ١ (١) \cdot \text{س} + ١$$

وهذه المعادلة صحيحة لدرجة كبيرة (أي أن الوزن المضاعف مقيدراً  
بالأوقيات = عشر أمثال التمدد مقيساً من نقطة الصفر بالبوصيات) ،  
والصورة العامة لقانون هوك هي :

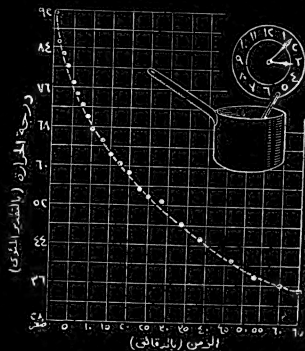
$$\text{و} = \lambda \text{ ص}$$

وهذه المعادلة تكافؤ المعادلة س = ١٠ إذا كان ١ = ١٠ وفي أي  
تجربة خاصة تتوقف قيمة  $\lambda$  على وحدات الوزن المستعملة (مثلاً لو كانت الأوزان  
المستعملة في التجربة هي عشرة أرباط فإن  $\lambda = \frac{١}{١٠}$ ) وعلى سيمك ومادة  
الزنبرك . وقاعدة هوك صحيحة لمدى واسع متى كان الزنبرك من المعدن ، وهي  
صحيحة لمدى خاص متى استعملت مادة المطاط الهندي وتؤدي إلى نتائج سيئة



شكل (١٠٠) : قانون هوك للزنبرك

يؤثر للتبريد كمثل الوصل قانون كى بسيط ( شكل ١٤٤ ) فعلى محور الصادات تمثل درجات حرارة ماء مغمى في وعاء ومترىك يبرد ، بعيداً عن التيارات الحرارية حتى يصل إلى درجة حرارة الغرفة . وتمثل على محور السينات عدد الدقائق ، التي تقضى منذ وضع الماء للتبريد ، إذ لنحل ما يحتاج إليه التجربة ترمومتر ووعاء ماء وساعة ، وشكل المنحنى يختلف تماماً عما سبق من منحنيات وسوف تذكر المعادلة التي تمثل مثل هذا المنحنى في نهاية هذا الباب ( شكل ١٥٤ ) .



شكل (١٤٤) قانون التبريد

ربما تذكر أن  $10^{-10}$  هي  $10^{-6}$  هي  $\frac{1}{10^6}$  على المعداد العشري الذي تقدم من كلنا جهده إلى حيث تريد ومنحنى شكل ١٥٤ الذي يمثل المعادلة  $y = 2 - 3e^{-0.004x}$  المعادلة التي تمثل تبريد الماء في الإناء هي

للتغاية في كل هاتك أوزان ثقيلة . وهذا صحيح بلع القوانين الطبيعية ، فالقانون الطبيعي صحيح الدرجة ما ويمكن تطبيقه حتى عالم المدى الذي يناسب ما نطلبه وهناك خاصية للقانون العلى نستحق أن نلاحظها هنا فلنكني استعمل قانون هوك على أوسع مدى بلزما أن نعرف كمية توقف قيمة  $x$  على سبيل ونوع الزنبرك ، لذلك نختار مادة للسلك تكون مادة معيارية وتأخذ عدة أسلاك مختلفة السمك ونرسم لها محيات فنحصل على قيم  $x$  المختلفة وسمك السلك المظاهر نحصل على علاقة بين السمك  $x$  في صورة بسيطة ، ولإنجاد قيمة  $x$  للأسلاك لها نفس السمك لكنها من مواد مختلفة ، يمكننا عمل جدول بين السب ما بين قيمة  $x$  للأسلاك مختلفة المادة وقيمة  $x$  للأسلاك مصنوعة من المادة المعيارية . وهذا يمكننا حساب التمدد البشري ، عن وزن ما متى علم سمك ومادة الزنبرك وذلك من المعادلة التي تربط  $x$  وسمك المادة المعيارية والحدود السابق لعم  $x$  المختلفة للأسلاك لها نفس السمك ، وأغلب القوانين الطبيعية تخضع على عدد مجرد أو ثابت مثل  $x$  ، يمكن أن ينقسم إلى عامل تدخل فيه الوحدات المستخدمة ( السمك في هذه الحالة ) و عامل نوعي ، ( يتوقف على نوع المادة ) . إذن القول بأن القوانين الطبيعية تخصص بالكميات ، كما يدعى بعض الناس ، صحيح نظراً للطريقة التي نكتب بها في الكتب المتداولة . وعندما نعمل هذه القوانين علينا أن نضع بدل هذه الأعداد المجردة الأعداد المناسبة لأنواع الأشياء الحقيقية وقبل هذه عصر النهضة ، كانت تستخدم الرياضيات في دراسة مسائل النجوم والانعكاس الأشعة الضوئية وفي مسائل ميكانيكية بسيطة على الأوزان مثل مبدأ الرافعة ، كما أنها كانت تخصص بالترافغ لاهمية على هندسة إقليدس وكان العلم مولوا إهتماما كبيراً نحو أشكال الأشياء فكان منها ينشئ هذه الأشياء أكثر من اهتمامه بتعرف وظيفة كل واحد منها .

لكن تمثيلاً ديكارت للهندسة على خريطة ليس مقصوداً على الإشكال ، بل يمكن تطبيقه على العلاقات بين جميع أنواع الكميات وليس هناك ما يستدعي أن يكون كل من إحداثي منحنى مثلاً لمساواة بل يمكن جعل خط طول عرض خريطة يشترط مقاييس ريمية مكانية كما في المثال السابق . وسنذكر الآن قانون

رياضي للقطع الناقص من طريقة رسمه . والطريقة المسبقة في شكل ١٤٥ تشبيه إلى حد كبير طريقة رسم شكل ١٨ الرملية ، فبدلاً من مشجب واحد يحتاج في هذه الحالة إلى مشجبتين وجبل معقود على شكل نجمة كما في شكل ١٤٥ (١) ب : الذي يوضح طريقة رسم القطع الناقص على الورق باستخدام دوسيين وحبيبات قطي على شكل نجمة بدلاً من الجبل والمشجبتين ، وتسمى القطعتان : النتان يثبت عندهما الدوسيان أو المشجبان بيوترون القطع الناقص وهما طرفا الشكل الأسفل والعلوي ، ويبعد بينهما ٢ ح من الوحدات الطولية ، والبقطة و في منتصف المسافة بينهما . ويبعد مسافة ح من كل من البيوتريين وتسمى مركز القطع ، وإذا كانت البيوتريتان قريبتين من بعضهما بحيث لا يسهل تمييزهما ، أصبح القطع قريباً جداً من الدائرة ، وإذا كانتا بعيدتين عن بعضهما حتى أنه يمكن أن يند الجبل بينهما دون ارتخاء ، تحول القطع في هذه الحالة إلى خط مستقيم ، وما أن الحبة ذات طول ثابت ، فإن مجموع بعدي أي نقطة عن البيوتريين يكون ثابتاً كذلك ، ومن الشكل وهي نصف المجموع ، أي أن

$$a + b = 2c$$

والقطع الناقص متماثل حول قطرين غير متساويين في الطول ، يسمى أحدهما المحور الأصغر ، وهو العمودي على الخط الواصل بين البيوتريين الذي يصل اللقط التي يكون عندها  $a = b = c$  ، وإذا كانت هي نصف المحور الأصغر كما في شكل ١٤٥ (ج) فإن  $a' = b' = c'$  (١) أما القطر الآخر فيسمى المحور الأكبر وهو الخط الواصل بين البيوتريين وامتداده من الجهتين ، وفي شكل ١٤٥ (ب) يسمى  $m$  نصف المحور الأكبر ونجد أن

$$\begin{aligned} 1. & a + b = 2c \\ 2. & a - b = 2c' \\ 3. & a + b + a' + b' = 4c \\ 4. & a - b + a' - b' = 4c' \end{aligned}$$

(٢)

وإذا كان المحور الأكبر مساوياً للمحور الأصغر تقريباً مثل الأقدار

المساوية في الدائرة فإن القطع الناقص ينفخ ويصبح شبيهاً بالدائرة وجب أن تكون  $c = c'$  صفراً كما تكون البيوتريتان قريبتين جداً من بعضهما وتكونان متطقتان عند المركز ، وتوصي النسبة بين  $c$  و  $c'$  بالاختلاف المركزي  $e$  للقطع الناقص حيث  $c$  هي البعد بين البيوتريين والمركز ، و  $c'$  هي المسافة بين المركز ومحيط القطع مقبلة على المحور الأكبر وإذاً

$$\frac{c}{c'} = e$$

$$a' = c' = c(1 - e)$$

إذاً الدائرة من قطع ناقص اختلافه المركزي صفر ، حيث أن  $c = c'$  ، وتسمى لا تقع عند مركز القطع الناقص في مسارات الأرض أو النجوم الكوكبية ، وهي تقع عند إحدى البيوتريين ، فإننا معاملة المسار يمكننا حساب مواضع الأرض والنجوم الكوكبية بالنسبة للشمس ، وفي الباب السادس تكلمنا عن مسار النجم كما لو كان دائرة ، وهذا كان جداً كقريب أولى ، لأن الاختلاف المركزي صغير كما سنرى الآن ، إلى اعتبار أكبر قيمة

(ب) وأصغر قيمة (١) أي الأبعاد الأرضية للقمر هما  $235719.4$  و  $201947.7$  ميل ، فإن نصف المحور الأكبر أي  $m = \frac{1}{2}(a + b) = 238823.5$  ميل ، وحيث أن  $a + b = 2m = 477647$  ميل ،  $c = 238823.5$  ميل ،  $c' = 238823.5$  ميل ،  $e = \frac{c}{m} = \frac{238823.5}{238823.5} = 1$  ، وبذلك يكون الاختلاف المركزي لمسار القمر هو

$$e = \frac{c}{m} = \frac{238823.5}{238823.5} = 1$$

ولإيجاد معادلة القطع الناقص بحسن وضع المادة (١) في الصورة

$$m^2 = (a - c)^2 + y^2 = (a + c)^2 - 4cy + y^2$$

$$m^2 = (a - c)^2 + y^2 = (a + c)^2 - 4cy + y^2$$

ومن هنا نجد أن  $m$  (نصف المحور الأصغر لمسار القمر)

$$m = \frac{1}{2}(a + b) = \frac{1}{2}(238823.5 + 238823.5) = 238823.5$$

فإذا كنت ترى أن الطريقة التي نستخدمها المعادلة معقدة نوعاً ما ، فاقراً  
أولاً الملحق الثاني وفي شكل ١٤٦ ص ٦٠ هي أي نقطة على المحيط ، ص هي  
الارتفاع الرأسية ، س هي بعدها الأفقي عن المركز ، ومن المثلثين القائمى الزاوية  
الذين وترهما هما المستقيمان الواصلان من ن إلى البؤرتين ننتج أن

$$(٤) \quad \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ٢$$

$$(٥) \quad \frac{ص}{س} - \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} - \frac{ص}{س} = ٢$$

$$(٥) \quad \text{وبجمع الطرفين الأيسر واليمين في المعادلتين (٤) و (٥) نجد أن}$$

$$٢ = ٢ + ٢ = ٤ \quad \text{و} \quad ٢ = ٢ - ٢ = ٠$$

$$(٦) \quad ٢ = ٢ + ٢ = ٤ \quad \text{و} \quad ٢ = ٢ - ٢ = ٠$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٠$$

$$\text{ولكن } ٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٠$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$٢ + ٢ = ٢ + ٢ = ٤$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$٢ - ٢ = ٢ - ٢ = ٠$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبجمع (٤) و (٥) نحصل على}$$

$$(٦) \quad \text{وبطرح (٥) من (٤) نحصل على}$$

$$\frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ٢$$

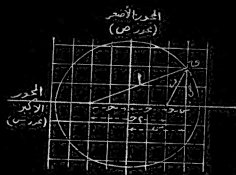
$$\frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ٢$$

$$\text{ومن (٢) و (٣) نجد أن} \quad \frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ١$$

وهذه هي المعادلة الكيرتية للقطع الناقص ، وهي تبين كيف نحسب  
البعد ص في الاتجاه الموازي للبحر الأصغر (٢) (نقطة بعدها الأفقي في  
اتجاه المحور الأكبر (٢) ) يساوي س. ولاستكمال هذه المعادلة إلزمنا  
معرفة قيم م و ن لهذا القطع ، وفي حالة منار القمر

$$م = ٣٨٤٧٠ \text{ ميلا}$$

$$ن = ٣٨٨٣٣ \text{ ميلا}$$



شكل (١٤٦) معادلة القطع الناقص

$$\frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ١$$

فمعادلة منار القمر هي

$$\frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} = ١$$

$$\text{أو ص} = \frac{338870}{138822} \sqrt{238823} - 2 = 2$$

حيث يقع المركز على بعد  $c = 0.0000 \times 238823$  ميل من الأرض كبقية مدار القمر.

وبطريقة يطول شرحها هنا، يكون من السهل نسبياً رسم شكل يبين الأبعاد النسبية للأرض أو أي كوكب عن الشمس (متخذين بعد الأرض عن الشمس كوحدة للقياس) وذلك بمشاهدات مستمرة لشرورها وغروبها لمدة طويلة، فإذا تم لك ذلك، يمكنك معرفة ما إذا كان الشكل الذي يمثل مدار الكوكب قطعاً ناقصاً بؤرته هي الشمس وذلك بقياس أكبر عرض للشكل أولاً، فهذا هو المحور الأكبر إذا كان الشكل قطعاً ناقصاً، أما المحور الأصغر فهو الخط العمودي على المحور الأكبر من منتصفه، وبما أنك تعرف معادلة القطع الناقص بدلالة ص ك من إذا عرفت محوره الأكبر والأصغر، فإنه يمكنك حساب قيم جميع قيم ص على التوالي، وبوضع هذه البقطة على الشكل فإنها تكون منطقة تقريباً على المنحنى المرسوم من المشاهدة إذا كان المدار قطعاً ناقصاً، ولقد جرب كثير من الأشكال قبل أن يجد أن القطع الناقص هو أكثرها انطباقاً، وبذا أجهز على نظرية أوملاطون القائلة بأن الأجسام تتحرك في دوائر لأن الدوائر هي أكثر الأشكال كلاً.

تجرب الطليقة العاملة — في الأشكال الثابتة في عبدة أفليديس، لا يقابلنا إلا زوايا لا تزيد على أربع قوائم ( $360^\circ$ )، وربما بدا لك حين عرفنا التقدير الدائري للزوايا أنه يمكن أن تكون الزوايا كبيرة كبنها نسبياً، إذ لما بدأ الناس في استخدام الهندسة الجديدة، كثر بينهم تداول آلتين تؤكدان إمكانية ذلك، أحدهما هي البوصلة البحرية أما الأخرى فهي الساعة.

وشك ١٤٧ يوضح كيف أن هذين الأخيرين قد جردا الزاوية من سبيلها إلى رسمها بآلية تلك الأشكال الثابتة الدورية في هندسة الإغريق،

انظر أولاً إلى الساعة فالوقت الآن هو الساعة العاشرة أو باللغة الحديثة الثانية والعشرون، فهي الزاوية المقسمة بالدرجات أو مقسمة بالتقدير الدائري بين عقري الساعة، فأول ما يحظر لك هو أن تقول  $90^\circ$  أو  $90^\circ$  ط. ولكن فلنفرض أننا نعنا عقرب الساعة من الحركة، فبعد مضي ساعة، يكون العقرب في نفس الوضع السابق تماماً، ولكن عقرب الدقائق يكون قد دار زاوية مقدارها  $360^\circ$  فالزاوية الآن هي  $360^\circ + 90^\circ$  ط. أو  $450^\circ$  ط. وإذا انظرنا لساعة أخرى فالزاوية هي  $90^\circ$  في هندسة الأشكال اللاتينية، ولكن إذا أدخلنا



شكل (١٤٧)

الزمن في الهندسة فإن الزاوية هي  $360^\circ + 90^\circ$  أو  $450^\circ$  ط. والزوايا نصف قطرية. وبعد ساعة أخرى تتكون العقارب في نفس الوضع، ولكن عقرب الدقائق يكون قد دار  $360^\circ$  أخرى أو  $450^\circ$  ط. وعلى ذلك فإنك ترى أن الزاوية الثانية الآن هي  $360^\circ + 450^\circ$  ط. أو  $810^\circ$  ط. وعلى ذلك فإنك ترى أن الزاوية الثانية التي مقدارها زاوية قائمة  $90^\circ$  أو  $90^\circ$  ط. زاوية نصف قطرية في الهندسة القديمة تكافئ  $450^\circ$  أو  $450^\circ$  ط. (أو  $90^\circ$  ط.) حيث  $450^\circ$  ط. = صفر  $90^\circ$  ط. الخ. وعنده ليست كل القضية، إذ أنه بإدارة عقرب الدقائق في الاتجاه المضاد ساعة مع تبيد عقرب الساعات فإننا نكون قد أنقصنا من الزاوية  $360^\circ$  أربع قوائم أو  $1440^\circ$  ط. زاوية نصف قطرية، وتعباً





عرفنا الجيب بأنه علاقة بين الزاوية والقوس . وإذا رجعنا إلى تعريفنا الأول للظل (ص ١٣٢) بأنه ميل . نجد أن قياس الزاوية  $٢١٠$  ( $١٨٠ + ٣٠$ ) أو الزاوية  $١٥٠$  ( $١٨٠ - ٣٠$ ) بطريقة الظل غير محال .

في شكل ١٤٨ رسم للتوضيح طريق بميل قدره ١ في ٢ ومار تحت تفق ويقطع محور السينات ، الذي يقاس عليه المسافة الأفقية لآية نقطة ، محور الصادات ، الذي يقاس عليه ارتفاع آية نقطة عن الطريق ، تحت النفق . وعلى ذلك تكون نقطة الاصل في هندسة عصر النهضة عند موضع النفق . إذن حسب شكل ١٤٨ يمكننا القول بأن :

(١) ميل الطريق بين النفق على محور السينات هو

$$\frac{ص}{س}$$

(ب) الزاوية التي يصنعها الطريق يسار النفق مع محور السينات تساوي  $١٨٠ + ١$  فيكون الميل

$$\frac{ص}{س}$$

$$\text{لكن النسبة} \frac{ص}{س} = \frac{ص}{س}$$

إذن لو اعتبرنا أن ظل الزاوية ١ يدل على ميل الطريق فإن الهندسة الكرتية تعرفه بأنه النسبة بين الإحداثي السيني والإحداثي الصادتي لآية نقطة على مين أو يسار نقطة الاصل . إذن

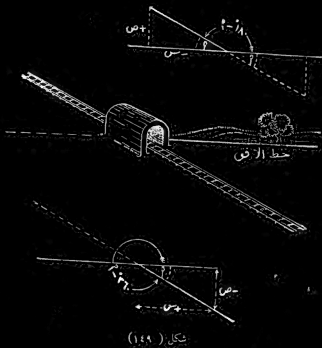
$$\text{طا} = ١ \text{ طا} (١٨٠ + ١)$$

وهناك فائدة بسيطة في تعريفنا للظل بهذه الطريقة . فالظل في المثلث الاقنبي لا يفرق بين ميل مستقيم يصنع زاوية مع محور السينات ويقع فوقه . ميل الطريق في شكل ١٤٩ وميل مستقيم يصنع زاوية ويقع أسفل مثل الطريق

في شكل ١٤٨ . أما في الهندسة الكرتية فالطريق فوق النفق في شكل ١٤٩ يميل بزاوية قدرها  $(١٨٠ - ١)$  على محور السينات أما تحت النفق فيميل

بزاوية قدرها  $(٣٦٠ - ١)$  . وعلى ذلك ميله لا يساوي  $\frac{ص}{س}$  بل يساوي

$$\frac{ص}{س} + \frac{ص}{س} \text{ أو } \frac{ص}{س}$$



شكل (١٤٩)

إذن في الهندسة الجديدة

$$\text{طا} (١٨٠ - ١) \text{ أو طا} (٣٦٠ - ١) = \text{طا} ١$$

$$\text{أي أنه لو كان طا} (٤٥) = ١ \text{ فإن طا} ١٣٥ = \text{طا} (١٨٠ - ٤٥)$$

$$١ - \text{طا} (٢٢٥) = \text{طا} (١٨٠ + ٤٥) = ١ +$$

إذن القيم العددية لظلال الروايا تتكرر في كل ربع (شمال شرقي، شمال غربي، جنوب شرقي) متى تعبرت البوصلة والإشارات من

ربع شمال شرقي	ص
ربع شمال غربي	ص
ربع جنوب غربي	ص
ربع جنوب شرقي	ص

ولما كان من الممكن تكوين زوايا من أي حجم على وجه الساعة، إذن نستطيع تعميم جدول الظلال بوضع

$$\begin{aligned} \text{ط} ١ &= \text{ط} ١٨٠ + ١ \\ \text{أو ط} ١ &= \text{ط} ١٨٠ + ٥ \\ \text{ط} ١ &= \text{ط} ١٨٠ - ١ \\ \text{أو ط} ١ &= \text{ط} ١٨٠ - ٥ \end{aligned}$$

وإذا كتبنا استطعنا أن نوسع في تعريف الظل، فليس هنالك أي سبب يمنعنا من منح الجيب وجيب تمام هذه الميزه. إذا اعتبرنا دائرة نصف قطرها الوحدة فإن حام هو الإحداثي الصادي وحام الإحداثي السيني (أنظر شكل ١٢٩ في الباب الثامن) وذلك لآية نقطة على محيط الدائرة (شكل ١٥٠). إذن القيم العددية للجيب وجيب تمام تتكرر والإشارات تتغير تبعاً للقاعدة

الربع	الجيب	جيب تمام	الظل
شمال شرقي	+	+	+
شمال غربي	+	= ٠	-
جنوب شرقي	=	-	-
جنوب غربي	-	+	-

وعلى ذلك نستطيع تعميم جدول الجيوب وجيب تمام باستخدام المعادلات

$$\text{ح} ١ = \text{ح} ١٨٠ - ١ = \text{ح} ١٨٠ + ١$$

$$\text{ح} ١ = \text{ح} ١٨٠ + ١$$

ومن شكل ١٤١ نستطيع أن نبين تعميم الجداول باستخدام الصيغ

$$\text{ح} ١ = \text{ح} ٩٠ + ١$$

$$\text{ط} ١ = \text{ط} ٩٠ + ١$$

$$\text{ح} ١ = \text{ح} ٩٠ + ١$$



شكل (١٥٠) تعميم جدول السبب المنتهية

الزوايا ١٨٠ - ١	الزوايا ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١
ح ١ = ح ١٨٠ - ١	ح ١ = ح ١٨٠ + ١

وليس هناك أي اعتراض لاعتبارنا أن الزاوية (١٨٠ - ١) هي الزاوية ١.

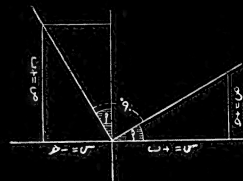
مقسمة أسفل محور السينات

ولما نفس موضع الزاوية - ١. إذن:

$$\begin{aligned} \text{جا } 360^\circ &= (1 - 360^\circ) \text{ جا } 1^\circ \\ \text{جا } 360^\circ &= (1 - 360^\circ) \text{ جا } 1^\circ \\ \text{طا } 360^\circ &= (1 - 360^\circ) \text{ طا } 1^\circ \end{aligned}$$

والآن قد تتساءل عما نرى إليه من التوسع في جداول الجيب وجيب التمام والظل للزوايا التي هي أكبر من  $90^\circ$ . والجواب على ذلك يتضح على الفور من شكل ١٥٢. أما أشكال الهندسة اللازمية فيوضعها الراعي لا تصلح إلا لتبسيط الزيادة أو النقصان إلى حد معين في حجم شيء ما. ولقد احتاجت إلى كثير من البراعة لجعلها صالحة لتبسيط الزيادة أو النقصان إلى حد معين في حجم شيء ما. ولقد احتاجت إلى كثير من البراعة لجعلها صالحة لتبسيط الكميات المتعددة التي ترتد إلى نفس القيمة باستمرار. وهذا النوع من الكميات على جانب كبير من الأهمية فتلا من الأشياء الدورية المألوفة التي تمثل على محور الصادات وتتغير مع الزمن الممثل على محور السينات. إزاحة الخط المتذبذب في المكان والزيادة والنقصان في النسبة البطالة في العمود التجارية المتعاقبة للبلاد الرسالية.

وشكل ١٥٢ يمثل المعادلة  $\text{ص} = \text{عاس}$



شكل (١٥٢)

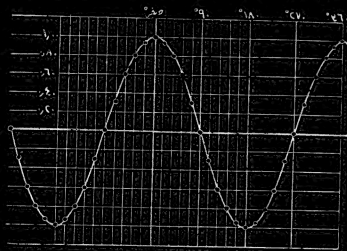
أما صيغ المعادلة  $\text{ص} = \text{جاس}$  فهي بمثابة تأكيداً على أن  $\text{ع} = \text{جاس}$  هي نقطة الأصل (٠ =  $90^\circ$ ) ويمكنك دمجها بنفسك.

ويرسم منحى المعادلة  $\text{ص} = 2 - \text{صا } 2^\circ \text{ أو } \text{ص} = 2 - \text{صا } 2^\circ$ ، يمكنك أن تستنتج بنفسك نوعاً عاماً لمعادلة منحنياً يشبه تماماً منحى المعادلة السابقة. فيما عدا أنه بمبادلة ٢،  $\text{ص}$  يكون أكثر فراطحة أو عمقا والصورة العامة هي:

$$\text{ص} = 1 - \text{صا } 2^\circ$$

$$\text{ص} = 1 - \text{صا } 2^\circ$$

وهذان المعادلتان هما منشأ رياضة المركز الموجة التي أصبحت من أهم



شكل (١٥٣) منحى  $\text{ص} = 1 - \text{صا } 2^\circ$

التطبيقات العملية للرياضة في العالم. ولقد أدى اكتشاف الطريقة البسيطة لتبسيط الحركات الشدية بالموجة أو الدورية إلى إمكان تبسيط مقاييس الطيف والتضيق الكبير في الغازات، وبدونه لا يمكننا عمل الحسابات الخاصة بالتيارات الكهربائية المتقطعة.

وسنعود فيما بعد إلى البحث في الحركة الموجة، وهنا نتختم عليك أن تفتتح في ملح البصر بشي. طالما أحدث لك ارتباكاً، فتكتب: أما سمعت أو قرأت في كتب العلم المخبورة أن الضوء ينتقل في شكل موجات، كما أن أطوال الموجات في عصر الراديو من الحقائق المألوفة في حياتنا اليومية، فمن المحتمل

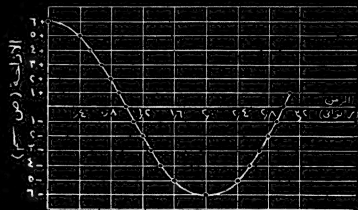
أنك كثيراً ما تساءلت بما يعنيه علماء الطبيعة حينما يتحدثون عن الموجات .  
يوضح الشكل التالي (شكل ١٥٣) الجواب على سؤالك . فهو يمثل الجدول المعطى  
في أول هذا الفصل لبيان كيفية استعمال  $+ ٠.٦٠$  و  $- ٠.٦٠$  في وصف موضع  
البندول في اللحظات الزمنية المختلفة . فمرور الصادات يمثل الراحة .

أما محور السينات يمثل الزمن الذي مضى على البدء . في المشاهدات المدونة  
في الجدول المعطى ص ٣٩٧ . ومنحنى البندول كثير الشبه بالمنحنى الذي معادلته هي

$$ص = ١٠ \sin \theta$$

وإذا أخذت جدولاً ورسمت النقط تجد أن المنحنى المبين في شكل ١٥٣  
يقترن كثيراً مع منحنى المعادلة

$$ص = ٦ \cos (٩٠^\circ - \theta)$$



شكل (١٥٣)

ولذا فإنه في وسعنا أن نستخدم المنحنى الأخير لحساب موضع البندول  
عند أية لحظة . وكل ما يعنيه عالم الطبيعة حين يتكلم عن موجات الضوء أو  
الصوت أو الكهرباء هو أنه يقوم بحسابها مستخدماً المعادلات التي يمكن تمثيلها  
بمنحنيات موجية . فمثل المنحنى المبين في شكل ١٥٣ . وهذا قد بدأنا بعض  
العموس الذي تحيط بالآلة الحديثة . وذلك بفصل المعادلتين  $ص = ٦ \cos$

عن أشكال هندسة إقليدس حيث كانا ينسبان إلى الزوايا الواقعة بين صفر  $٩٠^\circ$   
أو بين صفر  $٦٠^\circ$  زاوية نصف قطرية .

وهناك مجموعة أخرى من الملاحظات ظهرت فافندتها في هندسة عصر النهضة  
فلوغة العدد ترمز إلى سيطرة المستعمر الأبيض فهي تحاول التعامل به في العبارة  
أن يأخذ أعداداً صحيحة وتضع خارج الزمان أمامه وتمنعه من أن يأخذ فيما  
كسرية . وبين شكل ١٥٤ كيف أن لها أثر كبير كعدد كسري في منحني  
المعادلة .

$$ص = ٣$$

إنك لا شك تعرف الآن ما يعنيه العبارة  $ص = ٣$  حيث  $ص$  عدد صحيح موجب  
أو سالب (أنظر شكل ٣٠٤ . وشكل ٣٠٩) . لكن أشكال إقليدس أولوية  
البدء فلا يمكن أن تعطينا مثالاً يوضح الحالة التي تكون فيها  $ص$  كسرية

وفي الحقيقة عندما نتعلم في بادئ الأمر أن ذلك يمكن بثلق يشبه فلق  
أهل جنوب أفريقيا الذين يدعون بعدم إمكان تعليم سكان البلاد الأصليين  
القرائة والكتابة بالرغم من أنه يمكنهم أن يروا مجموعات من طلبة زولو<sup>(١)</sup>  
وكسوزا<sup>(٢)</sup> يدسون حبات النفاصل والتكامل متى رفعوا التحفظ في زيارة  
كلية فورت هار<sup>(٣)</sup> في سيسكا<sup>(٤)</sup> . فالطريق لمعرفة ما إذا كان يمكن  
المستوطن الأصلي أن يتعلم ما نستطيع نحن أن نتعلمه هو أن نتعلمه وهذا يجب  
أن يكون مبدأ الحركة العالمية في جنوب أفريقيا إذا كانت حركة تقدمية .  
ولا شك أن ما تقدمه هندسة عصر النهضة للعامل  $ص$  في  $٣$  من فرصة للعمل  
الماهر يجب أن يماثل ما تقدمه جبهة مقدمة لقبيلة البانتو<sup>(٥)</sup> الإفريقية .

ولقد وقعنا في شكل ١٥٤ جميع قيم  $ص = ٣$  المناظرة لقيم  $ص$  الصحيحة

Xoso (٢)	Zulu (١)
Cliskei (٤)	Fort Hare (٣)
Bantu (٥)	

(١) زيمبابوي  
(٢) زيمبابوي  
(٣) زيمبابوي  
(٤) زيمبابوي  
(٥) زيمبابوي

والواقعة بين  $١٠٠ = ١٠٠$  من  $١٠٠$  واصلنا بين هذه النقط وحصلنا على منحنى وبذلك جردنا من كونها عدداً صحيحاً ليرى ما إذا كانت مفيدة وهي غير مفيدة هذا الشرط. ولقد أعطينا في الباب السادس ص ٣٦٩ قاعدة أرشميدس

$$- \frac{1}{2} = - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

ومن السهل أن ترى صحة ماسبق للاعداد الصحيحة، فمثلاً

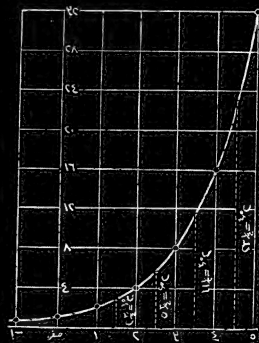
$$٢ = ٢ \times ٢$$

$$٢٢ = ٨ \times ٤$$

وعلى ذلك لو جعلنا من يؤدي عملاً مفيداً عندما لا تكون عدداً صحيحاً، بأن

$$١٦ = ٢ \times ٢ \times ٢ \times ٢$$

يمكننا أن نقرأ من المنحني بدرجة كبيرة الدقة قيم من المناظرة قيم من



شكل (١٥٤) المنحني الذي مادك من  $٢ = ٢$  من

الواقعة بين  $١٠٠ = ١٠٠$  من  $١٠٠$  ونحصل على

$$\frac{١١}{١٠} = ٢ \frac{١}{١٠}$$

$$\frac{١١}{١٠} = ٥ \frac{١}{١٠}$$

$$١٥٨ = \frac{٢ \times ٢}{١١} = ( \frac{٢}{١١} \times \frac{٢}{١١} )$$

وهذا العدد قريب من ١٦ وهي نتيجة يسمح بالرسم تقريبي فالفرق أقل من  $\frac{١}{١٠}$  في المائة.

ويمكنك من الرسم الحصول على ما يأتي:

القيمة الحقيقية

القيمة (التقريبية) الحقيقية

٣٢	٣١,٦	$\frac{٢ \times ٢}{١١} \times \frac{١١}{١٠}$	$\frac{٢ \times ٢}{١٠} \times \frac{١١}{١٠}$
٦٤	٦٣,٩	$\frac{٢ \times ٢}{١١} \times \frac{١١}{١٠}$	$\frac{٢ \times ٢}{١٠} \times \frac{١١}{١٠}$
٦٤	٦٦,١	$\frac{٢ \times ٢}{١١} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$	$\frac{٢ \times ٢}{١٠} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$
١٢٨	١٢٤	$\frac{٢ \times ٢}{١١} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$	$\frac{٢ \times ٢}{١٠} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$
٣٥٦	٣٦٧	$\frac{٢ \times ٢}{١١} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$	$\frac{٢ \times ٢}{١٠} \times \frac{٢ \times ٢}{١٠}$

ومنحنى شكل ١٥٤ مرسوم على ورق مربعات رخيص جداً (أكرايس قيمته بنس) ولذلك لا يمكن أن تكون المقاييس صحيحة لأقل من ٥ في المائة. فمن ضرر في بعضها كان الخطأ فيها أكثر من ١٠ في المائة، ومن المحزن أن تحصل بنفسك على نتائج أحسن، إذ ما ذكرناه هنا كان ليس لك أن المعامل من  $٢$  له من الفائدة ما يجب أن نتوقعه عندما يأخذ قيمة كسرية. وسوف ترى في الباب القادم كيف يؤدي إطلاق المعامل من المعدل فقط على الأعداد الصحيحة إلى حيلة الحذف الزمني التي هي اختراع في تاريخ الحساب، والعملة  $٢$  مثل حاس  $٢$  حاس، تلعب دوراً هاماً في قياس التيارات المنبهرية بعيداً أن أصبحت تقوم بعمليات ضعيفة من القيام بها قيود إقليدس وتوابع التفرقة بين البيض والبيضاء للدرجة العدد.



وإلى أسفل نحو اليمين . ولكي نفرق بين المحنجات التي تمثل القوى الزوجية والمحنجات التي تمثل القوى الفردية ، نكتب معادلاتها في الصورتين الآتيتين .

$$ص_2 = ص_1 + ۱$$

إِذْ عِنْدَمَا ه = ا6س<sup>٣</sup> = س<sup>٢</sup>6س<sup>١+٥٢</sup> = س<sup>٣</sup>وَعِنْدَمَا ه = ٦

$$6 \text{ س} = 2 \text{ س} \quad 6 \text{ س} = 2 \text{ س}$$

يمثل الشكلان الآتيان متجهين ينتميان إلى مجموعة المتجهات التي تمثلها المعادلة .

$$ص = ۱س + ۵۲س + ۱ + ۵۲$$

وَمَعْنَاكَ أَنْ تَلَاظِحَ أَنَّهُ لَقِيمٌ مِنَ الْكَبِيرَةِ فِي شَكْلِ ١٥٦ (قَارِنْ بِشَكْلِ ١٥٥)

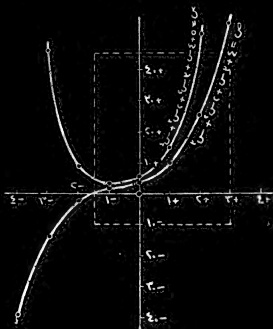


شکل (۱۵۶)

بصبح المنحنى مائلا المنحنى ص = ب من حيث م فردية أي أن

وهذا ما يجب ان نتوقعه ، فعدد ما  $= ٣$  نجد أن  $٣$  ، ولكن عددا ما  $= ٨$  نجد أن  $٨$  نهاية أمثل  $٨$  . أما القيم من الصغيرة فإن شكل المخي يقرّب جداً من شكل المخي  $= ١٠$  .

وهذا أيضاً بدني ، فعند ما  $s = 1$  نجد أن  $s = 1$  من  $1$  وعند ما  $s = \frac{1}{2}$  فإن  $s = \frac{1}{2}$  من  $\frac{1}{2}$  أي أن  $s$  أربعة أمثال  $s$  . إذن في الجوار المباشر لنقطة الأصل ( $s = 0$  من ) تكون القوة

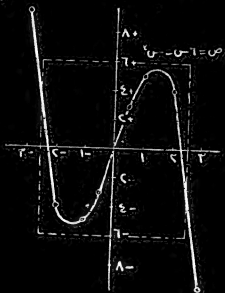


شكل (٥٧) : منحنيات الاموال



ص = ۲ صا ب س

وهي تختلف في إشارات وقيم  $\alpha$  و  $\beta$  .... الخ. العدديّة ، والمسيبة



(شکل ۱۵۸) الماتحي الثاني معاريفه ص - ب - ج - د - هـ

ص = 1

$$ص = ٤ - ٥س + ٦س^٢$$

ونلاحظ أن إحدى المتادائتين تحتوي على قوى فردية فقط والأخرى على قوى زوجية فقط، كما أن المحدتين في الجوارز المائمين النقطة الأصل دوريان





والقطع الناقص . فالدائرة هي منح فيه س ، البعد بين أية نقطة على المحيط والمركز ، دائماً ثابتة مهما كانت الزاوية  $\alpha$  التي يصنعها المستقيم س مع خط الاستواء . إذن إذا كانت حركية ثابتة فإن المعادلة القطبية للدائرة هي

$$r = \rho$$

والمستقيم يصنع زاوية ثابتة مع خط الاستواء . وجميع خطوط العرض ، إذن إذا مر بنقطة الأصل فمعادله هي

$$r = \alpha$$

في شكل ١٦١ ، البعد (س) عن إحدى البورتين هو أحد الأحدثين القطبين والزاوية  $\alpha$  التي يصنعها المستقيم الواصل ما بين أية نقطة ن والبورتة ، الأحدثان القطبي الآخر . بما أن مجموع البعدين البورتين ثابت (٥٢) فإن طول البعد البورتى الآخر يكون  $52 - س$  ، والتوازي  $52 - \alpha$  يعني نفس الأشياء كما في شكل ١٤٥ . القطر إلى المثلثين القسائمي الزاوية الموجودين في شكل ١٦١ ، نجد أنه من (١)

$$ل = س ح \alpha + ك س ص \alpha$$

وأيضاً من معادلة ٢ في توضيح رقم ٨

$$ل^2 = (س ح \alpha + ك س ص \alpha)^2 + (ه ح \alpha + ك ه ص \alpha)^2$$

$$= (س ح \alpha + ك س ص \alpha)^2 + (ه ح \alpha + ك ه ص \alpha)^2$$

$$= ٤٤٠٠ - ٤٤٠٠ س + ٤٤٠٠ س^2 + ٤٤٠٠ ه + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2 + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2 + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2$$

وإذا نظرت إلى التذييل الموجود بصفحة (٢٥١) من الباب السادس ستري أن

$$س^2 = (س ح \alpha + ك س ص \alpha)^2$$

$$= ٤٤٠٠ - ٤٤٠٠ س + ٤٤٠٠ س^2 + ٤٤٠٠ ه + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2 + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2 + ٤٤٠٠ ه س + ٤٤٠٠ ه^2$$

بالقسمة على ٤٤٠٠ نحذف س من كل من الطرفين نحصل على

$$س = س ح \alpha + ك س ص \alpha$$

$$١ - س = س ح \alpha + ك س ص \alpha$$

وبالرجوع إلى شكل ١٤٥ مرة أخرى ، سنذكر أن إذا كان م هو نصف المحور الأصغر فإن

$$م^2 = (١ - س)^2$$

وبمثل إذا كان م نصف المحور الأكبر

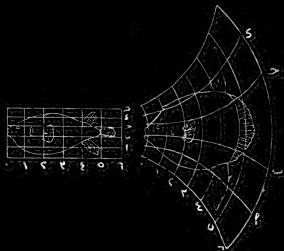
$$م = ١$$

$$١ - س = ١ - س$$

وعلى ذلك نستطيع أن نضع المعادلة القطبية للقطع الناقص في الصورة

$$م = (١ + س ح \alpha)$$

$$أو م = (١ + س ح \alpha)$$



(شكل ١٦٢٠)

على اليسار نلاحظ مثالاً من Genus Diodon . وعلى اليمين ، يقول الأستاذ داركن ثومسون : بعد حوال الأحدثات الرئيسية إلى مجموعة من التوازي المتعددة المركز والإحداثيات الأوتية إلى مجموعة من التوازي إلى اتجاه مجموعة من التوازي المتعددة المركز . وبذلك نأخذ الشكل القديم في الأحدثات الجديدة كمثل واضح يوضح كيف يتغير شكل الأرض من الزمان . وفيما يأتي المبرهن الذي يختلف عنه اختلافاً بسيطاً في شكله ودرجته حيث الشمس Sunfish

وهناك طريقة أخرى لتبسيط النقطة بواسطة نوع من الخرائط يسمى  
الجغرافيون خرائط فالامستند<sup>(١)</sup> أو مولويد<sup>(٢)</sup> للسقوط ويسمى الرياضيون  
الاحداثيات المقوسة. ولما كانت خطوط الطول تتجمع عند القطبين فهي ليست  
متوازية لخطوط العرض، لكن طريقة مركز تور الاسقاطية تمثل خطوط  
الطول بمستقيمات متوازية لذلك فهي تشوه حجوم القارات والمحيطات بالنسبة  
إلى بعضها، جاعلة بلاداً مثل جريلاند التي تقع في أقصى الشمال تبدو كبيرة عن  
حقيقتها. أما خرائط فالامستند للسقوط فهي تصحح هذا التشويه بمثل خطوط



جميعية بصرية في احداثيات كرتونية



احداثيات جميعية الكوناري  
كسقوط من على اقل



جميعية بونون (بوسار)



جميعية تيماري (تين)



جميعية كلب  
(شكل ١١٢ ص ١٤١)

الطول على مستقيمات مقوسة تتجمع عند القطبين، وهناك تطبيق على الاحداثيات  
المقوسة في شكل ١١٢. مأخوذ من كتاب "Growth and Form" للاستاذ  
داركي تومسون<sup>(١)</sup> أحد كبار المتحدين باللغة الانجليزية في العالم. هذا التطبيق  
ينبثق إلى أمر هام وهو: تشبه جميعية أو جسم أحد الانجاس مرسوم تبسيطاً  
للاظام الكرتوني. وربما يؤدي استخدام هذه الطريقة إلى مفتاح قوانين الجيو  
في تشرد الانجاس.

تحديدات هندسة عصر النهضة — بر وضعنا نصب أعيننا طول دراسنا  
هذه أن تطبيق الرياضة على العالم الحقيقي يعطى وصفاً تقريبياً للأشياء التي نراها  
أو نسمعها أو نعالجها. القدر أننا كيف ترك أفديس الزمن من حساب الهندسية  
وكيف أدخله ديكرات في الهندسة. ولكن هل يعني هذا أن هندسة عصر  
النهضة أعطتنا أخيراً وصفاً كاملاً للعالم؟ لا شك أن الاجابة بالنفي، فقد تركت  
الهندسة الجديدة شيئاً كما فعلت هندسة الاغريق، ولكي تتحقق من هذا  
الشيء عد مرة أخرى إلى مسألة البندول، فترى كيف لا تمثل المعادلة

ص = ص + ص من تذبذب البندول تمثيلاً تاماً.

والسبب في ذلك أن منحني المعادلة يتدعى الجين وعلى اليسار إلى أية درجة  
نظام. أعني أنه لو كانت من تدل على الزمن فإن المعادلة تتغير إلى أن بندول  
يتذبذب منذ الأول قبل أن تبدأ قراءاتك، وعندما ترسم المنحنى مبتدئين من  
زمن ما، تكون بذلك أدخلنا شيئاً لا وجود له في الشكل الرياضي، المنحنى كما  
لو أسقطنا من حسابنا أحد أجوبة معادلة المخروط لانا نستعمل أحد المخروطين  
الذي يمثله المعادلة.

وتختلف الديناميكا في رياضة الاغريق عنها في رياضة عصر النهضة،  
فالأخيرة تدخل الزمن في حسابها. كما أن رياضة عصر النهضة ليست بتاريخية  
فلا تدخل في حسابها التاريخ الماضي، إذ نشأت مدة الجارة عندما كانت السفن

D'Arcy Thompson (1)

Molluscide (1) Flamsteed (1)

تستخدم الفلك لتسير في البحار . والتاريخ الماضي ليس بذي أهمية للأغراض  
العالمية لأن خواص عالم نجوم تغير قليلاً في مدة تور في حاجات الإنسان  
الاجتماعية . فبمكنا استخدام نفس الأسس الحسابية متى حدث أو سيحدث  
كسوف وتولى الطبيعة الحديثة والكيمياء الحديثة وعلم الحياة الحديثة عناية  
أكبره جداً بمسائل النور والانعكاس ، والناتجة التاريخية القديمة أصبحت  
مسألة مهمة في العلوم الطبيعية . وفي تاريخ الثقافة التجارية ، نجد أن مستقبل  
العديد الانساني يتوقف أكثر وأكثر على فهم العلاقات الإنسانية على ضوء  
الخبرة التاريخية . فحين قد بدأنا نرى أن الرياضة التي تسمح لنا بالحركة ليست  
كافية بل تحتاج إلى رياضة تخصص بالبحث في من أين أتينا وإلى أين سترحل .

### تمارين على الباب التاسع

سنذكر الآن نقطة مهمة جداً في جميع تمارين الميكانيك يجب أن نتذكرها  
لإذ ربما لم تتبينها عند قراءة الكتاب . إذا استخدمنا متجه لتمثيل شكل هندسي  
بالضبط يلزمنا إيجاد جده قياسية واحدة لكل من  $s$  و  $s'$  من أي أن  
 $s' = s \cos \theta$  هي معادلة دائرة متى قيس كل من  $s$  و  $s'$  من نفس  
الطول ، ولو كانت  $s$  كبيرة جداً بالنسبة إلى  $s'$  كان من المناسب أن تمثيل  
الوحدة من  $s$  بمقدار  $s'$  والوحدة من  $s'$  بمقدار  $s$  . سم وعليا أن نتذكر  
أن المسافة المناسبة على أحد المحاور تختلف في قيمتها عن المسافة مقالة على  
المحور الآخر .

لأن يمكن أن نختار وحدات القياس بأية طريقة نعلم عند رسم الميكانيك  
التي تمثل القوانين الطبيعية .

وقبل أن نحاول أي مثال ، بين أن الدائرة هي الشكل الذي معادله

$$s' = s \cos \theta$$

ولذلك كون جدولاً لجمع قيم  $s$  والملاحظة لقيم  $s'$  الواقعة بين  $s = 0$  و  $s = 1$

يجب يكون الفرق بين أي قيمتين متتاليتين  $\frac{1}{2}$  . ( استخدم جدولاً للجدول  
التي تبعة )

$$s' = s \cos \theta$$

$$s' = s \cos \theta$$

$$s' = s \cos \theta$$

$$s' = s \cos \theta$$

وقع على المنحني النقطتين  $s = 2,18$  و  $s' = 1,8$  . إحداثيات مقيسة على محور  
الصادات  $s' = 1,8$  على محور السينات  $s = 2,18$  . والمثلث لجميع النقط الأخرى في  
الجدول ثم لرسم المنحني المار بين هذه النقط .

١ - = يحرك مصعد في بناء مكون من ستين طابقاً وبيدماً من الطابق  
السفلى كالآتي : يصعد عشرين طابقاً وينزل أربعة طبقات وبعد ذلك يتحرك  
إلى أعلى ثمانية طبقات وإلى أسفل ثلاث طبقات ثم سبعة عشر طبقة وبعد ذلك  
يصعد عشرة ويهبط واحدة ثم يصعد خمسة و واحد عشر ثم يهبط أربعة  
وعشرين . فامرر به الآن في نهاية هذه الفترة .

٢ - لرسم منحني دائرة نصف قطرها  $s$  سم ومركزها يقع  
(١) عند نقطة الأصل (٢) عند النقطة  $s = 2,18$  و  $s' = 1,8$

ما هي المعادلة الكيرتيرية في كل حالة ؟

٣ - برهن على أن الإزاحة التي يصنعها المماس لدائرة عند أية نقطة مع

محور السينات هي  $\frac{s}{s'}$  حيث  $s$  و  $s'$  إحداثيات النقطة .

بين من الرسم الذي رسمته الآن أنه إذا كانت زاوية  $\theta$  موجبة ومقاسة  
بالتقدير الدائري فإن  $s' < s$  ، أقل من  $s$  ، وطا  $s' > s$  أكبر من  $s$  .

٤ - إذا كان  $s$  أي طول مقيس باليوبجيات  $s'$  من أي طول مقيس  
بالأقدام  $s' = 12$  فإن  $s = 12$  .

الرسم منحني مكونا من خمسة نقاط ويربط العلاقة بين البوصات والإقدام  
ثم أقرأ من المنحنى عدد البوصات في ١ ٢ قدماً ٣ ٦ قدماً ٤ ١ قدماً ٥ قدماً .

٥ - كون منحنيات عمالة للتحويل من سنتيمترات إلى بوصات ومن  
جنيحات إلى دولارات ومن بنقات إلى أرحال للماء .

٦ - ارسم المنحنى  $ص = ٣ + ٤$

ثم ارسم بعد ذلك (دون استخدام جدول)

$$٣ ص = ٥ ص + ٦ \quad (أ) \quad (ص = \frac{٦}{٣} + ٥)$$

$$ص = ٣٢ ص + ٤٠$$

٧ - يتجمد الماء عند درجة ٣٢ فهرنهايت وبغلي عند درجة ٢١٢ فهرنهايت .  
وحسب المقياس المتوحي يتجمد عند الصفر وبغلي عند ١٠٠ . إثبت أن العلاقة  
بين المقياس التهرنهي والمقياس المتوحي تعين بالمعادلة

$$ف = \frac{٩}{٥} ٣٢ + ٣٢$$

الرسم منحنى هذه المعادلة ومنه عين الدرجة المتوحي المناظرة لدرجة حرارة  
الدم العادية ( ٩٨,٤ ° ف )

٨ - ماهي زاويتا ميل المستقيمين

$$(أ) \quad ص = ٣ + ٣$$

$$(ب) \quad ص = ٣٧ + ٢$$

عل محور السينات ؟

٩ - إذا ملك، مجموعة من المستقيمات بالمعادلات

$$ص = م + ١$$

$$ص = م + ٢$$

$$ص = م + ٣$$

إذا تعرفه عن هذه المستقيمات ؟

١٠ - ماذا يمثل المقدار  $ح$  في المعادلة  $ص = م + ٣$  حبانها ؟

١١ - ماهي معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ؟

١٢ - خرج مستر إلفاس للسيير، فقطع ثلاثة أميال في الساعة الأولى ٢ ١/٢  
ملاقي الساعة التي تلتها، ٢ ميلا بعد ذلك ثم أخذ بعد ذلك راحة قدرها ثلاثة  
أرباع ساعة وسار بعد ذلك بمعدل منتظم قدره ٢ ١/٢ ميلا في الساعة وذلك لمدة  
ثلاث ساعات . أوجد بواسطة الرسم البياني المسافة التي قطعها مستر إلفاس  
في ساعة ونصف وثلاثة ساعات ونصف وخمسة ساعات ونصف .

وإذا بدأ مستر ديفيس من نفس النقطة بعد مستر إلفاس بساعتين واستخدما  
دراجة يسير بها بسرعة منتظمة قدرها ستة أميال في الساعة، اوضح وحسب  
مستر ديفيس على الرسم السابق ثم عين المسافة من نقطة الإبتداء في اللحظة التي  
لحق فيها مستر ديفيس بمستر إلفاس .

١٣ - لرسم المستقيمين

$$٢ ص = ٣ + ٣١$$

$$٣ ص = ٢ + ٣٩$$

في شكل واحد، ثم عين نقطة تقاطعهما . ( انظر الباب السابع لكن تری  
الطريقة البانية لحل المعادلات الآتية : )

١٤ - حل المسائل الموجودة في تمرين ١٤ ، الباب السابع، ياناي ثم قارن  
بين النتائج التي تحصل عليها والنتائج السابقة .

١٥ - لرسم باعتناء منحنى المعادلة  $ص = س^٢$  لقيم  $س$  الواقعة بين  
- ١٠ و ١٠ وحيث وحدة  $ص$  تساوي وحدة  $س$  استخدم المنحنى الآتي :

(أ) كون جدولاً للعبور التربيعي للأعداد من ١ إلى ١٠٠

(ب) كون جدولاً لمربعات الأعداد من ١ إلى ١٠٠

١٦ - لرسم المنحنيات الآتية :

(أ) منحنى العلاقة بين مساحة المثلث المتساوي الأضلاع وقاعدته

(ب) منحنى العلاقة بين مساحة المثلث المتساوي الساقين وكل من زاويتي

قاعدته تساوي ٤٥° ٦° والقاعدة .





$$\begin{aligned} (1) \quad 5 &= 2 + 3 \\ (2) \quad 8 &= 2 - 3 \\ (3) \quad 5 &= 3 - 6 \end{aligned}$$

٢٧. لرسم منحنى جا س ومنحنى طاب من مستخدما القيم س = صفر ٦  
٣٠ ٤٥ ٦٠ ٩٠ ثم عين من المنحنى القيم التقريبية لكل من

$$\begin{aligned} & \text{جا } ٧٥^\circ \quad \text{جا } ٣٥^\circ \quad \text{جا } ١٥^\circ \\ & \text{طا } ٧٥^\circ \quad \text{طا } ٣٥^\circ \quad \text{طا } ١٥^\circ \end{aligned}$$

ثم قارن هذه القيم بالجداول .

٢٨. لرسم المنحنى ص = س<sup>٢</sup> ثم كون جدول مكعبات الأعداد من ١ إلى ٢٠

٢٩. لرسم منحنيات

$$y = (1-x)^2 \quad y = x^3 \quad y = (1-x)^3$$

ثم عين منها قيم

$$y = (1-x)^2 \quad y = x^3 \quad y = (1-x)^3$$

٣٠. لرسم منحنيات

$$y = x^2 \quad y = x^3 \quad y = x^4$$

٣١. لرسم المنحنيين

س = ٤ - ٦س + ٢س<sup>٢</sup> = ٨ ( يبي هذا المنحنى القطع الزائد )

٣٢. بين بالرسم أن المعادلة س<sup>٢</sup> + ص<sup>٢</sup> = ع<sup>٢</sup> تمثل معادلة كرة مركزها عند نقطة الأصل .

٣٣. لإوجد باستخدام الجداول ٩ جوب وجوب تمام وظلال الزوايا الآتية : ٢٠° - ٦° - ١٠٨° - ٤٠٠° - ٥٠٠° .

٣٤. لرسم منحن بين الكمية (ص) التي يصل إليها ١٠٠ جنيه أو ١٠٠ دولار في س من السنين بمعدل ٢ + ٣.٦ + ٣.٦ + ٤.٦ في المائة إذا كان (١) الربح بسيطاً (ب) الربح مركباً .

### بعض الصيغ الهامة

$$\begin{aligned} ١ - \text{معادلة الدائرة} \quad & س^2 + (١ - س)^2 = س^2 \\ ٢ - \text{معادلة الخط المستقيم} \quad & ص = (١ - س) + ٢ \\ ٣ - \text{معادلة القطع المكافئ} \quad & ص = س^2 \\ ٤ - \text{معادلة القطع الناقص} \quad & \frac{ص^2}{١} + \frac{س^2}{٢} = ١ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٥ - \text{جا } (٥ - ٥) &= \text{جا } ٥ - \text{جا } ٥ \\ \text{جا } (٥ - ٩٠) &= \text{جا } ٥ - \text{جا } ٩٠ \\ \text{جا } (٥ + ٩٠) &= \text{جا } ٥ + \text{جا } ٩٠ \\ \text{جا } (٥ - ١٨٠) &= \text{جا } ٥ - \text{جا } ١٨٠ \\ \text{جا } (٥ + ١٨٠) &= \text{جا } ٥ + \text{جا } ١٨٠ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ٦ - \text{جا } (٥ + ٢) &= \text{جا } ٥ + \text{جا } ٢ \\ \text{طا } (٥ + ٢) &= \text{طا } ٥ + \text{طا } ٢ \end{aligned}$$

$$\text{جا } (١ - س) = \left[ \frac{١ + س^2}{٢} + \frac{١ - س^2}{٢} \right]$$

من المهم جداً أن تكون قيم الزوايا العامة مألوذة لك وليس هناك داع لحفظها بل يمكن بسهولة استنتاجها من الشكل .  
لاحظ أنه استعمل ٥ ٦ في صيغ ٦ ٥ للدلالة على زاوية ومما حرقان إغريتيان لها استعمال شائع في الرياضة للدلالة على كمية مجبولة كعني س في معادلة ٦ أو كيات معلومة مثل ٦ ٦ ب ج ح .

٣٢٤

٢٤٥

٦٤٨

١٢٩٦

١٦٢٠٠

٧٨٣٨٠

(أربع مراتب)

٣٢٤

٢٤٥

(عملية واحدة) ٥٦٩

## الباب العاشر

التطبيقات الاجتماعية لعلم الحساب

أو

### اكتشاف اللوغاريتمات

نقد ١٥٠٠ عام سبقت الثقافة الإسكندرية في التنبؤ بالتطورات الثلاثة الهامة في النهضة الرياضية التي أصبحت ظهور المديوقراطيات البروتستانتية فخرائط بطليموس ومنتجيات أبولونيوس هي أساس الهندسة التحليلية التي يجتازها في الباب السابق .

أما طريقة أرشميدس في إيجاد مساحة الدائرة ، وطريقة فيون لاستخراج الجذور التربيعية فقد أوحيا بمعلتين أساسيتين ستستفيد منهما في باب آخر عند دراسة حساب التفاضل والتكامل وقد عثر أرشميدس أيضا على القاعدة التي بنيت عليها اللوغاريتمات وسنحول اهتمامنا الآن إلى بحث اكتشاف اللوغاريتمات والنشاط الجديد في دراسة المتسلسلات الذي نتج عنها نتيجة لزيادة التجارة وتخمين وسائل الملاحة ، وضأت عمليات حسابية أكثر تعقيدا من التي كان يحتاج إليها الرياضيون الاسكندرانيون وأصبحت الحاجة ملحة إلى طرق حسابية جديدة أفضل وتحتاج إلى مجهود أقل من التي عليها لنا العرب أساسا عند الحضارة النورية وتتيح عن هذا خطوة كبيرة إلى الامام في سبيل جعل الحساب علما اجتماعيا .

إذا قرأ القارئ قاعدة ضرب عددين  $324 \times 245$  مثلا ) بطريقة جمع نفس العددين ، نلاحظ أن عدد العمليات التي نلزم للضرب أكبر دائما من عدد التي نلزم للجمع ( إلا طبعاً إذا وقع أحد العددين بين ١٠ و ١٠٠ أو كان مكرراً بسيطاً للعدد ١٠ ) كما يتضح مما يأتي :

وإذا كانت الأعداد المستعملة كبيرة فإن المجهود الذي يلزم لعملية الضرب (أو القسمة) يصبح أكبر بكثير جداً من ذلك اللازم لعملية الجمع أو الطرح وعلى ذلك فإننا نقصد كثيراً من الجهد إذا استطعنا أن نستغنى عن عملية الضرب بعملية جمع أخرى وقد جعل اكتشاف اللوغاريتمات هذا ممكناً . والعبارة الآتية مأخوذة من حساب اللوغاريتمات ، طبعه ١٦٣١ لمؤلفه بريجز الذي كان أول من حسب الجداول التي نستعملها الآن ، اللوغاريتمات أعداد اكتشفت لتسهيل حل المسائل الحسابية والهندسية بواسطتهما تتجنب عمليات الضرب والقسمة المتعبة وتتحصل على نتيجتها بإجراء عمليتي جمع وطرح بدلاً منها على الترتيب . وأيضاً يمكن استخراج الجذور التربيعية ، تلك العملية الثمينة المرفقة بسهولة كبيرة ، وبالاختصار تحصل على إجابة جميع المسائل سواء فيها الحسابية والهندسية أو الميكانيكية بسهولة ووضوح .

لقد جاء التذكير في إمكان ابدال عملية الضرب المعينة بعملية جمع أعداد معينة يمكن الحصول عليها من جدول عن طريقين . وكان يظن أولاً أن هذين الطريقين مستقلين تماماً ، وسرى فيما بعد كيف يمكن الربط بينهما باستعمال العدد النحلي  $\sqrt{2}$  أو  $\sqrt{3}$  . ولقد قامت الطريقة الأولى عند ما حسبت جداول حساب المثلثات المستعملة في الملاحة أما الثانية فتشأت نتيجة للعمليات الحسابية الممتدة التي تظهر عند حساب الفائدة المركبة .

في أواخر القرن السادس عشر ، أصبحت الدائري مكرراً هاما للبحث في المسائل المتعلقة بالملاحة في الدائري فلم يتشور برهاسي الفلكي بأبحاثه التي

وعلى ذلك يكون  $١٧٣٦٥ \times ٩٩٠٢٧ = ١٧١٩٦٠٠٠$   
 وهذه النتيجة صحيحة إلى خمسة أرقام عشرية ويمكن التأكد من ذلك  
 بإجراء عملية الضرب العادية

$$\begin{array}{r} ١٧٣٦٥ \\ \times ٩٩٢٠٧ \\ \hline ١٥٦٢٨٥ \\ ١٥٦٢٨٥ \\ ٣٤٧٣٠ \\ ١٢١٥٥٥ \\ \hline ١٧١٩٦٠٠٠ \end{array}$$

وتعتمد دقة النتيجة على الجداول المستخدمة. وفي هذه الحالة استعملنا  
 جداول ذات خمسة أرقام

وهذه لا تضمن الدقة التامة بعدد الرقم الرابع. وللحصول على النتيجة  
 صحيحة إلى سبعة أرقام مغنوية يلزم استعمال جداول ذات ثمانية أرقام.

من هندسة شكل ١٦٤. يتكك أن تمرهن أيضاً أن

$$(١) \quad \text{ح}١ - \text{ح}٢ = (\text{ح}١ - \text{ح}٢) + \text{ح}١ - \text{ح}٢$$

وقد رأينا من قبل (ص ٢٥) أن

$$(٢) \quad \text{ح}١ + \text{ح}٢ = (\text{ح}١ + \text{ح}٢) - \text{ح}١ - \text{ح}٢$$

يتبع من هاتين المعادلتين أن

$$\text{ح}١ + \text{ح}٢ = (\text{ح}١ - \text{ح}٢) + \text{ح}١ - \text{ح}٢$$

ويمكن استعمال المعادلة الأخيرة في إجراء عمليات الضرب بنفس الطريقة  
 السابقة.

وربما تكون نفس هذه العملية هي التي أوحى إلى نابير، الذي يسمى  
 عادة مكتشف اللوغاريتمات بالطريقة البسيطة التي يحصل بها على حاصل ضرب

خلدت عصره. واقترح اثنتان من الرياضيين الدانمركيين هما ويتش (١٥٨٤)  
 وركلافوس (وقد نشر كتابه دى استرو ليو، سنة ١٥٩٣) استعمال الجداول  
 المنثنية لإختصار العمليات الحسابية. ويجد القارئ في الباب السادس  
 المتطابقة الآتية:

$$(١) \quad \text{ح}١ + \text{ح}٢ = \text{ح}١ - \text{ح}٢ + \text{ح}٢ + \text{ح}٢$$

ويمكن الحصول على عبارة شبيهة بهذه لجيب الفرق بين زاويتين بطريقة  
 ماثلة (شكل ١٦٤) وهي

$$(٢) \quad \text{ح}١ - \text{ح}٢ = \text{ح}١ - \text{ح}٢ - \text{ح}٢ + \text{ح}٢$$

وبجمع طرفي هاتين المعادلتين نجد أن

$$\text{ح}١ + \text{ح}٢ = (\text{ح}١ - \text{ح}٢) + \text{ح}٢ - \text{ح}٢$$

أو

$$\text{ح}١ + \text{ح}٢ = \text{ح}١ + \text{ح}٢ + \text{ح}٢ - \text{ح}٢$$

بمساعدة جداول الجيب وجيب التمام يمكن استعمال هذه المعادلة لإيجاد  
 حاصل ضرب عددين معينين. فنلا لإيجاد

$$١٧٣٦٥ \times ٩٩٠٢٧$$

نجد من الجدول أن

$$\text{ح}١٨ = ١٧٣٦٥$$

$$\text{ح}٢٨ = ٩٩٢٠٧$$

ونعلم من المعادلة السابقة أن

$$\text{ح}١٨ + \text{ح}٢٨ = \text{ح}٢٨ + \text{ح}١٨$$

وبالبحث في الجدول نجد أن

$$\text{ح}١٨ = ٣٠٩٠٢$$

$$\text{ح}٢٨ = ٣٤٩٠$$

$$\text{ح}١٨ + \text{ح}٢٨ = ٣٤٣٩٢$$

$$\text{ح}١٨ + \text{ح}٢٨ = ١٧١٩٦$$

مسيوب الزوايا بإجراء عملية جمع عادية. وقد رجب كل من: تيشو براشي  
وكليل باكتشاف تأثير. كما ترجم إدوارد رايت، أحد رياضيي كبرج ومؤلف  
كتاب الاكتشاف وصحيح أخطاء ملاحية معينة، (١٥٩٩). النسخة اللاتينية  
سنة ١٦١٤.

ومع ذلك ، فبندر ، إن لم يستحل ، في تاريخ العلم أن يفرد شخص واحد بالقام بأكتشاف علمي عظيم . والظروف الاجتماعية التي تطاب طرقات أسرع لتعيين ووضع التجويز في السماء ، هي نفسها التي دعت إلى البحث عن طريق أسرع لحساب الثروة التي تراكت نتيجة للرحلات البحرية التي كان يستحيل القيام بها دون الاستعانة بعلم الفلك الذي يعين مواضع السفن في البحار . وكان تحضير الجدول المستعملة في حساب الفائدة أحد الأمور التي قادت إلى اكتشاف اللوغاريتمات وحساب الفائدة المركبة هو أحد التطبيقات العملية للعنسية الهندسة .

إذا كانت هي الفائدة عن كل جنيه مستقر فإن الجنيه الواحد يزداد إلى (1 + ١٠) من الجنيهات بعد سنة واحدة. فمثلاً إذا كانت من تساوي خمسة في المائة (١٠) فإن الجنيه يزداد إلى ١,٠٥ جنيه. وإذا لم تصرف الفائدة عن السنة الأولى يصبح رأس المال في بدء السنة الثانية ١,٠٥ مرة من قيمته الأصلية. وعلى ذلك يزيد كل جنيه من رأس المال الأصلي إلى  $(1,05) \times (1,05) = 1,1025$  جنيه في نهاية السنة الثانية. وعلى ذلك يمكننا وضع معدل زيادة الجنيه في جدول كما يأتي:

$$^L(s+1) \quad ^r(s+1) \quad ^r(s+1) \quad s+1 \quad 1$$

المستقلة العليا متسلسلة حساية والسفلى متسلسلة . وإذا كان المطلوب  
سأب القائمة المركبة كل ثلاثة أشهر فيكون من اللازم ملء الجدول قيم  
جديدة وذلك باحتلال القوى المتسلسلة كما نرى :

[illegible]

والتعدين جملة مبلغ ١٥٦ جنيه نهاية ٢٤ السنة بمقتضى مراكمة ٣٪ إلا يلزمنا  
الإجراء عملية الضرب

$$\frac{1}{4} (1, r) \times 107 = \frac{1}{2} (1, r) \times 107$$

وقد نشر بنفسه الذي أشرنا إليه أكثر من مرة فيما قبل ، جداول مشابهة  
لاستعمالها في الحساب الجاري .

ولذا جعلنا القابله مائة في المائة (أى 100) وإن جرد القسلسلين الموجودتين فيما قبل تناظر الاحداثات السببية والصادرة للبحر الموجود في ص 64 ذلك لأن 100 - 1 = 99 عندما 1 = 99 وقد رأينا كيف حصل على القيم المتطرفة لأن باع الأيام أى  $100 \times \frac{1}{100} = 1$  ويجب علينا الآن أن نبحث معنى القوة الكسرية بطريقة أكثر دقة. فقد كانت الفكرة الأساسية لجيدول الوارثيات مفهومة لأرستيبس. دعنا الآن نورد الفهرس مرتين. فطور هذا الإكتشاف، أولاً نضع أن متسلسلة هندسية تحت متسلسلة أعداد اعطى ملة المودة لها مثلاً

V	7	0	Σ	2	2	1
V	7	0	Σ	2	2	1
128	7Σ	22	17	Λ	Σ	2

و يستعمل طريقة نابير ونسبى الأعداد الموجودة في المتسلسلة الحسابية العليا

لوحات يتم والاعداد الموجوده أسفلها في أى المتسلسلة الهندسية

أعداد مقابلة للوغاريتمات : وتتلخص قاعدة أرشميدس في أنه إذا أردنا

ضرب أى عدد من موجودين في المتسلسلة السفلى يجمع العددين المناظرين لهما في السلسلة العليا وينتج عن العدد المناظر لهذا المجموع في المتسلسلة السفلى. ويمكن وضع هذه القاعدة كتابة كما يأتي :

$$a_{n+1} = a_n \times b_n$$

فمثلا

$$a_2 = a_1 \times b_1$$

$$(1 \times 8 = 8)$$

ومعنى المؤثر ٨، لو ٨ الموجود إلى يمين عدد ما هو ٨ إبحث في الجدول عن الأس الذي يجب رفع ٨ إليه لتحصل على العدد ٨.

وإذا وجدنا عدد مقابل ٨، أو مقابل على ٨ عدد ٨، فمناها ٨، إبحث في الجدول عن الأساس مرفوعا إلى القوة التي يمثلها العدد ٨، فمثلا إذا كان

$$n = 8$$

$$m = 8$$

$$n = \text{عدد مقابل } (n) \text{ أو مقول } (m)$$

تستطيع بذلك أن تكتب قاعدة الضرب بطريقة أخرى بوضع

$$k = n \text{ أى أن } n = \text{لوك}$$

$$n \times k = n \text{ أى أن } m + n = \text{لوك} (n \times k)$$

$$\text{أو } n \times k = \text{مقول} (m + n)$$

$$= \text{مقول} (\text{لوك} + \text{لوك})$$

وباستعمال هذه الرموز الجديدة، يكتب المثال العددي السابق كما يأتي :

$$1 \times 8 = \text{مقول} (\text{لوك} + 8 \text{ لوك})$$

$$= \text{مقول} (4 + 3)$$

$$= \text{مقول} 7$$

والخطوة الأخيرة معناها ٧، إبحث في صف الأعداد المقابلة للوغاريتيمات (السفلى) عن العدد الذي يناظر ٧ في صف اللوغاريتيمات (العلاوى). وبإبحث تجد أن العدد المطلوب هو ١٢٨.

وطبعا لا يكون الجدول السابق صالحا لاستعماله في إجراء عمليات الضرب إلا إذا احتوى على جميع الأعداد التي قد نستخدمها. لقد بدأنا باستعمال المؤثر

٨ في ٨ لتفيد ضرب ٨ في نفسها من مرة. ثم لاحظنا أن المكان النظر إلى العلاقة بين ٨ من من زاوية أخرى. إذا نظرنا إلى المتسلسلتين السابقتين من اليسار إلى اليمين ترى أن نقص ٨ بمقدار الوحدة معناه ضرورة تسعة العدد الموجود في الصف السفلى على ٨. فمثلا إذا كانت ٩ = ١٦ فإن ٩ = ١٦. وعلى ذلك ترى أنه إذا كانت ٨ هي الأساس المقوضى في لوح العد فإن قيمة الحزوة في العمود (٨ + ١) هي ٨ وأذن تناظر ٨ قيمة حزوة ٨ في عمود الوحدة ٨ أى أنه لجميع قيم ٨

$$1 = 1$$

والقوة التي تمتص عن الصفر بمقدار الوحدة هي ١ - ٨

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{1} = 1 \div \frac{1}{1} = 1$$

$$\frac{1}{0} = 0$$

أى أن ١ تناظر قيمة كل من حزوة في العمود النوني عن يسار عمود الوحدة ١. ١ تناظر قيمة كل حزوة في العمود النوني عن يمينه أو تناظر قيمة

رقم موجود في المكان العشري التوفي من ذلك يمكننا كتابة اللوغاريتمات

والاعداد المقابلة لها الآتية المبينة على المتوالي الهندسية  $^2_3$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \end{array}$$

وإذا سمنا منحنى يمر بالنقط التي تمثل هذه الأعداد احداً تياتها (ص)  $^2_3$

أو (ص)  $^2_3$  وقولنا (ص) يصبح في استطاعتنا إيجاد قيمة المناظرة لأي قيمة من قيم ص صحيحة أم كسرية: أي أن قاعدة أرشميدس تنظر صحيحة عندما تكون ص م. م أعداداً كسرية في المعادلة:

$$1 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

ولاختبار صحة هذه القاعدة عددياً يلزم تعريف 1 و 1 عندما لا تكون

م. م أعداداً صحيحة. إذا كانت قاعدة أرشميدس صحيحة فإن:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

وفي الحالة العامة:

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

وعلى ذلك تتكرر قيمة  $^2_3$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

بالمثل وبهذه  $^2_3$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ويمكن التعبير عن أية كسرية مثل  $^2_3$  أو في الحالة العامة:

بطريقة أخرى وذلك باستعمال العلاقات

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

ويمكننا كتابة

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} \times \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

والقاعدة العامة هي

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}}$$

وأول من ذكر قاعدة القوى الكسرية والسالبة التي اعطاها هو

أورستوس في كتاب اسمه «الجوريمون» بروبوشين، ونشر حوالي ١٢٥٠ م.

أي أن الجلس البشري احتاج إلى ألف عام لينقل من قاعدة أرشميدس إلى

الخطوة التالية في تطور جدول اللوغاريتمات وعلى ذلك يجب ألا يشعر القارئ

بالضيق إذا اضطر إلى انقاص بضع ساعات أو بضع أيام لكي تدود استعمال

القوى الكسرية والسالبة

يمكننا الآن جعل جدول اللوغاريتمات يحتوي على عدد مطلوب فنلا في

حالة اللوغاريتمات المبينة على المتسلسلة الهندسية  $^2_3$ ، يمكننا عمل جدول كالآتي

صحيحاً إلى ثلاثة أرقام عشرية:

٥ = ل. ٥

٥ = مق. ٥

١٠٠٠	١
١٠٤١٤	٢
٢٠٠٠	٢
٢٨٢٨	٢
٤٠٠٠	٤
٥٦٥٧	٢
٨٠٠٠	٨
١١٣١٤	٣
١٦٠٠٠	١٦
٠٠٠	٠٠٠

اللوغاريتمات هي أعداد المتسلسلة الحسابية  $٥$  المولدة للمتسلسلة الهندسية  $١$ . وللتفريق بين اللوغاريتمات المناظرة لحدود متسلسلة هندسية معينة وبين اللوغاريتمات المناظرة لحدود متسلسلة هندسية أخرى، تسمى  $٢$  أساس المتسلسلة وتكتب  $١$  كصفة رياضية في الركن الأسفل على اليسار وذلك لإيضاح نوع جدول اللوغاريتمات المستعمل، كما يأتي:

$$\begin{array}{l} \text{ل. } ٢,٨٢٨ = ١,٥ \\ \text{مق. } ٢,٨٢٨ = ١,٥ \end{array}$$

وطبعاً يمكننا الاستمرار في ملء جدول اللوغاريتمات السابق إلى أن نستوفي حاجتنا. فثلاً يمكننا أن نكتب:

$$\begin{array}{l} \text{٢,٥} \left( \frac{١}{٢} \right) \\ \text{٧,٥} \left( \frac{١}{٤} \right) \end{array}$$

وبعد الحصول على جدول مثل هذا يمكننا استعماله في إيجاد حاصل ضرب الأعداد كما يأتي:

نفرض أن المطلوب إيجاد حاصل ضرب  $٢,٨٢٨ \times ٥,٦٥٧$ . نعلم من الجدول أن:

$$\text{ل. } ٢,٨٢٨ = ٣ \quad \text{أو} \quad ١,٥ = ٢,٨٢٨$$

$$\text{ل. } ٥,٦٥٧ = ٢,٥ \quad \text{أو} \quad ٢ = ٥,٦٥٧$$

باستعمال قاعدة أرشيدس يكون:

$$٣ = ٢ + ١ \quad ٢ = ٢ \times ١ \quad ٣ = ٥,٦٥٧ \times ٢,٨٢٨$$

ويكون حاصل الضرب الذي نبحث عنه العدد الذي لوغاريتمه  $٤$  أي:

$$\text{مق. } ٤ = (٣,٥ + ١,٥)$$

$$= \text{مق. } (٢,٨٢٨ + ٥,٦٥٧)$$

ومن الجدول نرى أن مق.  $٤$  هو  $١٦$ . واختبار صحة هذه النتيجة عملية الضرب:

$$\begin{array}{r} ٢,٨٢٨ \\ ٥,٦٥٧ \\ \hline ١٤,١٤٠ \\ ١٥,٦٦٨ \\ \hline ١٤١٤٠٠ \\ ١٩٧٩٦ \\ \hline ١٥,٩٩٧٩٦ \end{array}$$

لاربعة أرقام معنوية.  $١٦ = ١٥,٩٩٧٩٦$

الفرق هو  $٢$  في  $١٦٠٠٠$  وهو خطأ يزيد قليلاً عن  $١$  في  $١٠٠٠٠$ . وطبعاً كان يمكن الحصول على نتيجة أفضل باستعمال جدول أعداد صحيحة إلى خمسة أو سبعة أو تسعة أو أكثر من الأرقام المعنوية. ويمكن ذكر قاعدة الضرب استعمال اللوغاريتمات باختصار كما يأتي: ولإيجاد حاصل ضرب عددين نبحث

عنها في عمود الأعداد المتعاقبة للوغاريتمات ، ثم اجمع العددين المناظرين لهذا  
في عمود اللوغاريتمات ثم اوجد العدد المناظر لحاصل الجمع في عمود الأعداد  
المتعاقبة للوغاريتمات .

وقد أشير إلى إمكان عمل مثل هذا الجدول في كثير من مؤلفات الحساب  
التجاري في القرن السادس عشر . وكان يتقبل متأكداً من فائدة مثل هذا  
الجدول . واقترح سيمور يعقوب عمله مرة ثمانية . ولم ينص سيورات قبله على  
نشر جداول نابير للوغاريتمات الجيوب حتى نشر جويست بيرجي من براج  
جداول المتواليات الحسية والهندسية لميسيط العمليات الحسابية باستجداء  
اللوغاريتمات لإيجاد حاصل الضرب . ولا يختلف جدول بيرجي عن الجدول  
الذي أعطيته إلا في أخذه العدد ١٠٠٠٠ كأساس . وقد احتير هذا العدد  
بالذات السبب معين بنشره فيما بعد . ورغم أن كيل قد أشار إلى جدول  
بيرجي كأداة مفيدة في حياتك الفلك فإن نشأة هذا الجدول لم تكن لها علاقة  
مباشرة بالحاجة إلى وجود جداول محسوبة لتعيين مواضع السفن كما في حالة  
جدول نابير للجيوب . والنتيجة الوحيدة لهذا الجدول هي زيادة استعمال  
جداول ستيفنس للقاعدة المربعة .

ولم يستعمل نابير أو بيرجي . اللذان اكتشفا اللوغاريتمات بطريقة مستقلة  
كل على حدة في فترة سيورات قبله . لم يستعمل كأساس أحد العددين  
المتعاقبين كأساس للوغاريتمات الحديثة .

وقد رأينا أن هناك وحدتان لقياس الزوايا في حساب المثلثات . ولا تزال  
تستعمل الدرجة الباقية في حل المسائل العملية . أما في المسائل النظرية فتستعمل  
التقدير الدائري وذلك للارتباط البسيط للغاية بين هذا التقدير وبين محسب  
الدائرة . وسنرى بزوايا استعمال التقدير الدائري بطريقة أكثر وضوحاً فيما  
يبدى . وكما في حالة الزاوية ، نستعمل في اللوغاريتمات نوعين مختلفين من  
الجدول ، الأول لأنه يناسب الأغراض العملية . والآخر لأن له جواص  
رياضية بسيطة . نبدأوا بحس اللوغاريتمات المحسوبة بالطريقة الآخرة .  
اللوغاريتمات الطبيعية .

كما سترى فيما بعد ، تحسب أول حساب المثلثات الحديثة أولاً بالنقد  
الدائري ثم تحول إلى درجات لاستعمالها في المسائل العملية . ونستعمل المعادلة  
الآتية للتحويل .

$$1^\circ = \frac{180}{\pi} \text{ دارة}$$

هناك طريقة بسيطة لتحويل اللوغاريتمات المحسوبة لأساس معين إلى  
لوغاريتمات محسوبة لأساس آخر . وهذه الطريقة تعتمد على المطابقة .

(١)  $\log_{10} 2 = 0.3010$  ، فمثلاً  $\log_{10} 8 = 3 \log_{10} 2 = 0.9030$  ، كما يمكنك أن ترى  
بإجراء عملية الضرب والمثال الآتي يوضح هذه القاعدة لفرض أننا حسبنا  
جدولاً للوغاريتمات والأعداد المتعاقبة لها بالنسبة للأساس ٢ .

من هذا الجدول نرى أن  $\log_2 10 = 3.3219$  ، أي أن  $2^{3.3219} = 10$  ،  
فإذا كان

$$m = 10 \text{ أو } m = 10^p$$

$$\text{فإن } m = 2^{3.3219p} \text{ أو } m = 10^p$$

$$3.3219p \log_2 2 = p \log_2 10$$

$$\log_2 m = 3.3219 \log_2 10$$

والصورة العامة لهذه القاعدة هي :

$$\log_m m = 1$$

$$\log_m m = 1$$

$$\text{مثلاً } \log_2 8 = 3$$

$$\log_2 10 = 3.3219$$



وقد اختير العدد ١٠ أساساً للوغاريتمات المستعملة في الأغراض العملية وذلك لأنه أساس النظام العددي أيضاً . وهذا يبسط حساب جداول اللوغاريتمات للأسباب الآتية إذا أخذنا ١٠ كأساس للجدول تكون متسلسلةه الأساييتان هما

$$\begin{array}{cccccccc} \text{لو} & ٢ & - & ١ & - & ٠ & - & ١ \\ & ٤ & & ٣ & & ٢ & & ١ \\ \text{مقلو} & ١٠٠٠ & & ١٠٠ & & ١٠ & & ١ \\ \text{وعلى ذلك يكون} & \text{لو} & ١ & = & ٠ & \text{لو} & ٦ & = & ١٠ \\ & \text{لو} & ٣٧ & = & ١٠ & \text{لو} & ١٠ & = & ٠ \end{array}$$

وحيث أن الجذر التربيعي للعدد ١٠ (ثلاثة أرقام عشرية) هو ٣,١٦٢ يكون لو ٣,١٦٢ = ٠,٥٠

$$\begin{aligned} \text{ولكن } ٣,١٦٢ \times ١٠ &= ٣١,٦٢ \\ \text{لو } ٣١,٦٢ &= \text{لو } (٣,١٦٢ \times ١٠) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{لو } ٣,١٦٢ &+ \text{لو } ١٠ = ٠,٥٠ \\ ١,٥٠ &= ١,٥٠ + ٠,٥٠ \\ \text{بالمثل لو } ٣١,٦٢ &= \text{لو } (١٠ \times ٣,١٦٢) \\ \text{لو } ٣,١٦٢ &+ \text{لو } ١٠ = ٠,٥٠ \\ ٠,٥٠ &+ ٠,٥٠ = ١,٠٠ \\ ٢,٥٠ &= \end{aligned}$$

أى أن تغيير موضع العلامة العشرية في عدد ما لا يؤثر مطلقاً على العدد الموجود على يمين العلامة العشرية في لوغاريتم ، كما يمكن استنتاج الرقم الموجود على يسار العلامة العشرية (في اللوغاريتم) بسهولة . فحيث أن  $١٠ = ١٠,٦١$   $١٠ = ١٠,٦١$  فإن هذا الرقم يكون صفراً في لوغاريتم جميع الأعداد الواقعة بين ١ و ١٠ . وحيث أن  $١٠ = ١٠,٦١$   $١٠٠ = ٢٠,٦١$  فإن هذا الرقم يكون ١ لجميع الأعداد بين ١٠ و ١٠٠ . وبما أن  $١٠٠ = ٢٠,٦١$   $١٠٠٠ = ٣٠,٦١$  فإنه يساوى ٢ لجميع الأعداد بين ١٠٠ و ١٠٠٠ . بالمثل وجود الرقم الصحيح ١ على يسار كسر عشري نحت عن العدد المقابل له (لوغاريتم) منهاء واضرب العدد المقابل للكسرى في ١٠ . ووجود العدد ٢ منهاء واضرب العدد المقابل للكسرى في ١٠٠ . وهكذا أى أنه

يكفينا لإجراء عمليات الضرب أن يكون لدينا لوغاريتمات جميع الأعداد الواقعة بين ١ و ١٠ . ٦ على قترات مناسبة . فمثلاً ليكن المطلوب حاصل ضرب  $١,٥٣٦ \times ٧٧,٠٠$  من الجدول نرى أن

$$\begin{aligned} \text{لو } ١,٥٣٦ &= ١٨٦٤ \\ \text{لو } ٧٧,٠٠ &= ٨٨٦٥ \\ \text{لو } ١,٥٣٦ \times ٧٧,٠٠ &= ٨٨٦٥ \end{aligned}$$

وعلى ذلك يكون

$$\begin{aligned} \text{مقلو } (١,٨٦٤ + ٨٨٦٥) &= ٧٧ \times ١,٥٣٦ \\ \text{مقلو } ٣,٠٧٢٩ &= \\ \text{مقلو } ٧١٩ \times ١٠٠ &= \\ \text{مقلو } ١,٨٣ \times ١٠٠ &= \\ ١٨٣ &= \end{aligned}$$

ويأجراء عملية الضرب العادية نجد أن النتيجة صحيحة لأربعة أرقام معنوية وهذا طبعاً هو أقصى ما نأمله من الدقة لأننا استعملنا جداول ذات أربعة أرقام

وقد نشر برنجر بالتعاون مع نايفر أول جدول للوغاريتمات ذات الأساس ١٠ . وقد أعطى برنجر لوغاريتمات جميع الأعداد الواقعة بين ١ و ١٠٠٠ . ٦ حاجة لأربعة أرقام عشرية وبعد ذلك بقليل ( ١٦٢٨ ) نشر إدريان فلاك في هولندا لوغاريتمات الأعداد بين ١ و ١٠٠٠ . ٦ حاجة عشرة أرقام عشرية . ولا يستعمل اللوغاريتمات لا يلزم إلا جدول ذو عمودين يحتوي الأول على  $(= \text{لو } ٥)$  والآخر على  $(= \text{مقلو } ٥)$  . ولكن يكون من الأنسب في أغلب الأحيان

وجود جدولين منفصلين لأعداد الترقى بين كل اثنين متاليين منها ثابت . مع لوغاريتماتها ( في الجدول الأول ) . والأعداد المقابلة لها ( في الجدول الثاني ) وهذا يجعل عملية الحصول على أيهما ( اللوغاريتم أو العدد المقابل للوغاريتم ) بعدد معين أسرع . والجدول الذي يحتوي عموده الأيمن على أعباد ( ن ) على قترات متساوية وعموده الأيسر على لوغاريتمات هذه الأعداد ( لو ن ) يسمى جدول لوغاريتمات . والجدول الذي يحتوي عموده الأيمن على أعداد

(ب) عل فرات متساوية و عموده الأيسر على الأعداد المقابلة لهذه اللوغاريتمات (مقابل ب) يسمى جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات . وعلى حسب هذا القسم تكون الجدول التي أعطاها يبرجى جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات . أما جدول بروجى فهو جدول لوغاريتمات . ولعمل جدول لوغاريتمات يجب أن نبدأ بعمل جدول للأعداد المقابلة للوغاريتمات . ويمكن عمل جدول لوغاريتمات بسيط بطريقة تقريبية كما يأتي . نعلم أن

$$10 = 1$$

$$10 = 1$$

وأيضاً بالضرب نعلم أن

$$10^{1.2} = 15.8$$

وهذا العدد يزيد عن ١٠٠٠ بمقدار  $\frac{2}{3}$  تقريباً

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

$$10^{1.2} = 15.8$$

وبذلك نحصل على جدول اللوغاريتمات التقريبى الآتى

لو	د	لو	د
١	١٠	٠	١٠
٢	٢٠	٢٠	٢٠
٣	٣٠	٣٠	٣٠
٤	٤٠	٤٠	٤٠
٥	٥٠	٥٠	٥٠
٦	٦٠	٦٠	٦٠
٧	٧٠	٧٠	٧٠
٨	٨٠	٨٠	٨٠
٩	٩٠	٩٠	٩٠
مقلو	مقلو	مقلو	مقلو

ويمكن اختبار صحة الجدول التقريبى السابق كما يأتى فى

$$٨ \times ٦ = \text{مقلو } (٨ \text{ لو } ٦ + ٦ \text{ لو } ٨)$$

$$= \text{مقلو } (٧٨ + ٩٠)$$

$$= \text{مقلو } ١٦٨$$

العدد المقابل للوغاريتم ١٦٨ يقع بين ٤٠ و ٥٠ و العدد ١٦٨ ينظر فى الفترة بين ١٦٠ و ١٧٠ أى لوغاريتم ١٧٠ و ٤٠ و لوغاريتم ٥٠ وإذا اعتبرنا أن مقلو ١٦٨ هو العدد المناظر لاربعة أخماس الفترة بين ٤٠ و ٥٠ نحصل على ٤٨، أى أن النتيجة صحيحة. ويمكن للتأري أن يستعمل هذا الجدول التقريبى ليعود لإجراء عملية القسمة. وعملية استخراج الجسندر التريعى باستخدام اللوغاريتمات وبالجمع بين قاعدة أوربيسبوس التوى السالفة وقاعدته رشيديس نجى أن:

$$\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠}$$

$$\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠}$$

$$\text{وإذا كان } ١٠ = \frac{١٠}{١٠} \text{ أى لو } ١٠ = ١$$

$$\text{فإن } ١٠ = \frac{١٠}{١٠} \text{ أى لو } ١٠ = ١$$

$$\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} \text{ أى لو } ١٠ = ١$$

$$\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} \text{ أى لو } ١٠ = ١$$

$$\frac{١٠}{١٠} = \frac{١٠}{١٠} \text{ أى لو } ١٠ = ١$$

نقرض مثلاً أن المطلوب إيجاد قيمة ٣٠ بنكتب

$$٣٠ = \text{مقلو } (٣٠ \text{ لو } ٢٠ + ٢٠ \text{ لو } ٣٠)$$

وبالحق فى الجدول التقريبى السابق نجد أن

$$٣٠ = \text{مقلو } (٣٠ \text{ لو } ٢٠ + ٢٠ \text{ لو } ٣٠)$$

$$= \text{مقلو } ٦٠$$

$$= ٤٠$$

وتعمد عملية استخراج الجندر على القانون

$$\frac{١}{١٠} = \frac{١}{١٠}$$

$$\text{فإذا كان } ١٠ = ١$$

يكون  $m = \frac{1}{n}$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

للحصول على الجذر التكعيبي للعدد ٨ يكتب

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ مقلو } (\frac{1}{3})$$

ومن الجدول التقريبي السابق نجد أن

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ مقلو } (\frac{1}{3})$$

$$= 2.000$$

$$= 2$$

ويمكن القاريء بسهولة من استخراج القاعدة المناظرة

$$\sqrt[n]{m} = \frac{1}{n} \text{ مقلو } (\frac{1}{n})$$

اختر هذا القانون لإيجاد قيمة  $\sqrt[3]{2}$  باستعمال الجدول التقريبي السابق

وكانت قواعد الضرب والقسمة واستخراج الجذور والرفع إلى القوى التي درستها من بين الخواص العجيبة لهذه الأعداد التي سجلها سيمبل وقد وضع ستيفل المتوالية العددية إلى جانب المتوالية الهندسية ولاحظ ما يأتي:

(١) جمع الجدود في المتوالية العددية يناظر ضرب الحدود المناظرة في المتوالية الهندسية.

(ب) طرح الجدود في المتوالية العددية يناظر قسمة الحدود المناظرة في المتوالية الهندسية.

(ج) ضرب أحد حدود المتوالية العددية في عدد ثابت يناظر رفع الحد المناظر في المتوالية الهندسية إلى قوة معينة.

(٥) قسمة أحد حدود المتوالية العددية على عدد ثابت يناظر استخراج جذر ذو درجة معينة لأحد المناظر في المتوالية الهندسية.

نظروا من ذلك أنه لما يدعو إلى أخذ الألف أن يضرب المنحول إلى مذهب لوثر ذلك الوقت العظيم في عمليات الجبرية في إثبات أن البابا ليس العاشر هو وحس أو كاليبس بدلاً من أن يقوم بعمل اجتماعي مقيد هو عمل جليل يبرجى ويريجز

وعندما أراد بريجنر عمل جدول دقيق لوفاراتجات بدأ بعمل جدول للأعداد المقابلة وبالإستعانة بالمعادلات

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

تحصل على

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{m} = \frac{1}{n}$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

$$(\frac{1}{100})$$

وباستخراج جدول ذات درجات أعلى يمكن جعل الفترة بين كل تعديل

متتاليين في العمود الآمين (هـ) صغير، بأية درجة مطلوبة. وللحصول على جدول لوغاريتمات، أى على جدول يحتوى عموده الآمين على أعداد  $n$  على فترات متساوية وفي العمود الأيسر على لوغاريتمات هذه الأعداد، يستعمل بريجنز القاعدة التى يرجع إلى ستيغل فضل اكتشافها. نكتب أى متوالية عددية (لوغاريتمات) مبتدئين بالوحدة، وأى متوالية هندسية (أعداد مقابلة لللوغاريتمات) مبتدئين بأساس المتوالية، مثل

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5 \quad \dots \quad \text{متوالية عددية (لوغاريتمات)}$$

$$4 \quad 16 \quad 64 \quad 256 \quad \dots \quad \text{متوالية هندسية (أعداد مقابلة لللوغاريتمات)}$$

قد يتذكر القارئ\* (ص ١٥٥) أن الوسط الحسابي لعددتين  $a$  و  $b$  هو

$$\left(\frac{a+b}{2}\right) \text{ والوسط الهندسي لعددين } a \text{ و } b \text{ هو } \sqrt{ab}. \text{ إذا أخذت ثلاثة أعداد}$$

متتالية في الصف العلوى فإن العدد الأوسط يكون هو الوسط الحسابي للعددتين الآخرين. مثلا إذا كانت  $4 \quad 6 \quad 8$  هى الأعداد فإن  $\frac{4+8}{2} = 6$  بالمثل لأى ثلاثة أعداد متتالية في المتوالية السفلى يكون الأوسط هو الوسط الهندسي للعددتين الآخرين. فمثلا إذا كانت  $4 \quad 6 \quad 8$  هى الأعداد فإن  $8 = \sqrt{4 \times 16}$  وبقى ما سبق صحيحا إذا كان أساس المتوالية الحادية أقل من الوحدة مثل

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{array}$$

أخذ الأوسط في الصف السفلى هو  $\sqrt{2} = \sqrt{2}$  والوسط الهندسي للحدين الآخرين هو  $8 = \sqrt{4 \times 16}$

استعمل بريجنز هذه الحقيقة لتحويل جدول أعداد متتالية لللوغاريتمات أى جدول ذى لوغاريتمات معطاة على فترات متساوية في العمود الآمين، إلى جدول لوغاريتمات، أى جدول توجد الأعداد المقابلة لللوغاريتمات فيه على فترات متساوية في العمود الآمين. وسنوضح هذه العملية الشاقة بتقريبات متتالية نفيسة لـ  $e$  كما في الجدول الآتى:

$$e = 2.71828$$

$$e = 2.71828$$

$$\begin{array}{lcl} 1 = 1 & & \\ 2 = 2 & & \\ 3 = 3 & & \\ 4 = 4 & & \\ 5 = 5 & & \\ 6 = 6 & & \\ 7 = 7 & & \\ 8 = 8 & & \\ 9 = 9 & & \\ 10 = 10 & & \\ 11 = 11 & & \\ 12 = 12 & & \\ 13 = 13 & & \\ 14 = 14 & & \\ 15 = 15 & & \\ 16 = 16 & & \\ 17 = 17 & & \\ 18 = 18 & & \\ 19 = 19 & & \\ 20 = 20 & & \\ 21 = 21 & & \\ 22 = 22 & & \\ 23 = 23 & & \\ 24 = 24 & & \\ 25 = 25 & & \\ 26 = 26 & & \\ 27 = 27 & & \\ 28 = 28 & & \\ 29 = 29 & & \\ 30 = 30 & & \\ 31 = 31 & & \\ 32 = 32 & & \\ 33 = 33 & & \\ 34 = 34 & & \\ 35 = 35 & & \\ 36 = 36 & & \\ 37 = 37 & & \\ 38 = 38 & & \\ 39 = 39 & & \\ 40 = 40 & & \\ 41 = 41 & & \\ 42 = 42 & & \\ 43 = 43 & & \\ 44 = 44 & & \\ 45 = 45 & & \\ 46 = 46 & & \\ 47 = 47 & & \\ 48 = 48 & & \\ 49 = 49 & & \\ 50 = 50 & & \\ 51 = 51 & & \\ 52 = 52 & & \\ 53 = 53 & & \\ 54 = 54 & & \\ 55 = 55 & & \\ 56 = 56 & & \\ 57 = 57 & & \\ 58 = 58 & & \\ 59 = 59 & & \\ 60 = 60 & & \\ 61 = 61 & & \\ 62 = 62 & & \\ 63 = 63 & & \\ 64 = 64 & & \\ 65 = 65 & & \\ 66 = 66 & & \\ 67 = 67 & & \\ 68 = 68 & & \\ 69 = 69 & & \\ 70 = 70 & & \\ 71 = 71 & & \\ 72 = 72 & & \\ 73 = 73 & & \\ 74 = 74 & & \\ 75 = 75 & & \\ 76 = 76 & & \\ 77 = 77 & & \\ 78 = 78 & & \\ 79 = 79 & & \\ 80 = 80 & & \\ 81 = 81 & & \\ 82 = 82 & & \\ 83 = 83 & & \\ 84 = 84 & & \\ 85 = 85 & & \\ 86 = 86 & & \\ 87 = 87 & & \\ 88 = 88 & & \\ 89 = 89 & & \\ 90 = 90 & & \\ 91 = 91 & & \\ 92 = 92 & & \\ 93 = 93 & & \\ 94 = 94 & & \\ 95 = 95 & & \\ 96 = 96 & & \\ 97 = 97 & & \\ 98 = 98 & & \\ 99 = 99 & & \\ 100 = 100 & & \end{array}$$

يكفى أن نستمر في هذه العملية حتى نحصل على النتيجة صحيحة لأى عدد مطلوب من الأرقام العشرية. ولكن يكفي ما سبق لتوضيح الطريقة التى استعملها بريجنز، ويمكن للقارئ\* أن يحرى بعض الأمثلة لنفسه وأن يختبر صحة النتيجة بإجراء العمليات الحسابية المباشرة. ونظن أن القارئ\* قد تحقق الآن من ضخامة المبرهن الذى ندين به الثقافة الاجتماعية التى أوجدها النظام "بروتستانتي" الجديد إلى حكمه أمثال بريجنز وفلاك من الرجال.

أقد رأينا في باب سابق كيف أن اقتراح سيقناست استعمال النظام العشرى للويزين والمقاييس قبل بقتور وقلة اعتنائه، رغم موافقته للحاجات المادية للديمقراطيات التجارية الجديدة. وكان سبب ذلك انصراف قادة المذاهب الفكرية إلى الجدول حول مسألتي خلود التقديسين والحضور الحقيقي. ولمثل هذا السبب كادت لوغاريتمات نابير تلقى نفس هذا المصير. إذ يعود الفضل في ترحيب رياضيو ذاك الوقت بهذه اللوغاريتمات إلى تفكير إدوارد رابيت العملي السليم وإلى المجهود العظيم الذى بذله بريجنز في الموضوع. وفي العام الذى نشرت فيه هذه اللوغاريتمات كتب بريجنز إلى الاسقف أشير يقول ولم أر في حياتي كتاباً سرى أكثر من هذا. وكان أشير يتسلق في هذا الوقت أحد فروع

الحساب الأخرى وفي نهاية اثنين من البحث المضى في مسائل النسب الموحدة  
في العهد القديم من الأجل نبح أجيراً في تقرير أن الإنسان قد خلق  
في الساعة التاسعة صباحاً من ٢٣ أكتوبر سنة ٤١١٤ قبل الميلاد . وكان لثاير  
محاولة مشابهة . وفي أثناء دراسته الجامعية وبين الإعجاب حاجم نابير بقصور  
البابستين عن سهولة الاعتراف بأن مدينة بروما ذات السبعة تلال والمنورة  
جنوبية بوجود القديس جون (هي ألم العالم الروحاني).

ومسند ذلك الوقت عزمت مجموعة أنه أن يستعيد دراستي وعوايني في  
البحث عن أمر أر هذا الكتاب المقدس وقد فعلت ذلك في كل فرصة ووقت  
أتجالي . ومن حسن الحظ أنه أخرج في ذلك واتى من نشر اكتشاف  
سالت جون سنة ١٥٩٤ . وفي نفس هذا العام مر تيشو براهي أن يعلم  
عن شاب إسكتلندي كان يزوره الأخبار الأولى عن التبسيط الجديد في فن  
الحساب . ويبدو أنه مقدر العصور الثورات أن يخرج منها الجدوة المتقدمة  
والرماد المطلق . بكتبات متساوية

والكي نضع أساس المجتمع الذي ليس فيه نظام للطقات والذي يجد فيه  
كل أنسان ما يكفيه ولا يترك أحد فقيراً . يحتاج إلى كثير من دروس تاريخ  
الإنسان القديم . فمن السهل أن تقدر شيطان دناير ولكن من الصعب أن تفهم  
الماد يشعلنا كثير من الاشتراكين دور المواهب العظيمة بتناقضاتهم المتبعة  
حول جدلية هيجل .

#### المسلسلات المستخدمة في عمل الجداول

أفقد احتوت جداول اللوغاريتمات الأولى على بعض الأخطاء . وقد  
لاحظت هذه الأخطاء . وصححت في وقت لاحق . وقد بذلت في إنشاء هذه  
الجدول مجهود هائل . ولم يكن غريباً إذن أن يهمل ذلك على البحث من طرف  
أخرى متطابقة لحساب اللوغاريتمات . ونتيجة لهذا البحث طهر خافز جديد  
لدراسة ما يسمى بالرياضيون . المسلسلات اللانهائية . لقد استعملنا في أول  
هذا الكتاب الكسر الدائري . ولتوضيح أن يتفرع أن عدد من حدود  
متسلسلة مبدئية لا يتجاوز حداً معيناً . ثم أمكننا بعد ذلك أن نثبت أن أية

متسلسلة هندسية أساساً أقل من الوحدة لما تنقص هذه الخاصة المتبدية  
(ص ١٩١٨٠٢٢٠) . وقد تلى اكتشاف اللوغاريتمات اكتشاف عدد كبير  
من المتسلسلات التي تشترك في هذه الخاصة .

وأول مثال سنجد هو متسلسلة ذات الحدين عندما يكون الأس كسراً . إذا

رجعت إلى الباب السابع ص ٢٢٥ ستذكر أن  $(1 + b)^n = 1 + nb + \dots$

$$1 + nb + \frac{n(n-1)}{2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3 + \dots$$

..... +

وإذا كانت  $b$  عدداً صحيحاً موجباً فإن المتسلسلة التي في الطرف الأيسر  
تتكون من  $(1 + b)$  حداً . ولقد وجدنا معنى معقولاً للقوى الكسرية  
والبالية .

وهذا يجعلنا تسأل : هل تبقى نظرية ذات الحدين صحيحة عند ما تكون  
 $b$  عدداً سالباً أو كسرياً ؟ والجواب هو أنها تبقى صحيحة في أغلب الأحيان .  
ويصبح المفكوك في هذه الحالة لانهائياً مثل الكسور الدائرية . ويكون مجموع  
محدوداً (مثل المتسلسلة الهندسية التي أساسها أصغر من الواحد الصحيح) إذا  
أخذت  $b$  في ما معبى . وللإجابة على صحة ذلك . نستعمل مفكوك ذات  
الحدين للحصول على قيمة كبريين احتياجاً لها فعلاً عند عمل الجداول العشرية في

ص ٢٣٥ . وأولى هاتين الكبريتين هي  $\frac{1}{2}$  ويمكن كتابتها على الصورة  $(1 - \frac{1}{2})^n$

والأخرى هي  $\frac{1}{3}$  ويمكن كتابتها  $(1 - \frac{2}{3})^n$  . وعلى ذلك يأخذ مفكوك ذات الحدين  
في كل من هذين المقدارين  $1$  وعلى ذلك يأخذ مفكوك ذات الحدين

$$1 - \frac{n}{1}b + \frac{n(n-1)}{2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3 + \dots$$

$$1 - \frac{n}{2}b + \frac{n(n-1)}{2}b^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}b^3 + \dots$$







هذه المتسلسلة أى أن  $(1 + \frac{1}{2})^2$  لا يمكن التعبير عنها بهذه الطريقة وحتى القرن التاسع عشر، ولم تحصل على اختبارات تكفي لبحث اقتراب مجموع المتسلسلات إلى نهاية معينة مثل القيمة النهائية  $\frac{1}{2}$  التى تقرب مجموع المتسلسلة:

$$(1 + \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + (\frac{1}{4} + \frac{1}{8}) + \dots$$

تدريجياً منها ولا يتعداها.

وربما وجد القارىء نفسه أكثر استعداداً لغفران ذنب البهتر إذا تذكر أن رياضى القرن السابع عشر يرمونوا على أن الله خلق الدنيا من لا شيء، وكان برهانهم يعتمد على أمور استنجوها من سلوك هذه المتسلسلات

وأبسط الاختبارات التى تساعدنا على معرفة ما إذا كانت المتسلسلة اللانهاية تقرب من حد معين أم لا، هو مقارنتها بمتسلسلة لانهاية أخرى تفعل ذلك. ويمكن استعمال هذا الاختبار للبرهنة على أن مفكوك ذات الحدين

$$(1 + \frac{1}{2})^n = 1 + \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{2 \times 2} + \dots$$

$$\frac{(1 + \frac{1}{2})^n}{2} = \frac{(1 + \frac{1}{2})^n}{2} + \frac{(1 + \frac{1}{2})^n}{2} + \dots$$

$$b \text{ بين } 1 - 6 + 1$$

ويمكن تقاربه ملاصقة كيفية استعمال هذا الاختبار في حالة المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$

والسبب في وجود نهاية هذه المتسلسلة الأخيرة هو وجود العامل  $\frac{1}{2}$

في مقام الحد  $(\frac{1}{2})^n$  الذى ينسبه  $\frac{1}{2}$  نلاحظ أن  $\frac{1}{2}$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} \times \dots \left( \text{أنظر ص } ٢١٧ \right) \text{ بأخذ عدد كاف من}$$

الحدود تصل إلى حد معين يكون عنده  $\frac{1}{2}$  أكبر من  $\frac{1}{10}$  من مهام كانت قيمة  $\frac{1}{2}$  ولكننا نعلم فعلاً أن المتسلسلة التى يساوى كل حد فيها عشر الحد الذى قبله تماماً تمثل كسراً دائرياً له قيمة نهاية يشابه الكسور أو ذى القيمة النهائية  $\frac{1}{2}$  وذى القيمة النهائية  $\frac{1}{2}$ . ووجد أن المتسلسلة التى كل حد فيها يساوى عشر الحد الذى قبله مباشرة لا يمكن أن تتعدى نهاية معينة فن باب أولى لا تتعدى المتسلسلة التى كل حد من حدودها أصغر من عشر الحد الذى قبله نهاية معينة أيضاً وعلى ذلك تكون المتسلسلة

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

تقارب (كما يقول الرياضيون) دائماً إذا كان  $\frac{1}{2}$  أصغر من  $\frac{1}{10}$  (س أى عدد ثابت)

وإذا كان البسط كسراً صغيراً فى متسلسلة من هذا النوع، يكون من الممكن الحصول على نتيجة دقيقة جداً من عدد قليل من الحدود فعلاً إذا أردنا إيجاد قيمة المقدار  $1.0001$  (أساس لوغاريتمات بيرجى) مرادفاً للقوى الخامسة، نكتب:

$$(1.0001)^5 = (1 + \frac{1}{1000})^5 = 1 + \frac{5}{1000} + \dots$$

$$+ \frac{10 \times 9}{2 \times 1000^2} + \frac{10 \times 9 \times 8}{6 \times 1000^3} + \dots$$

وهي متسلسلة من النوع السابق لأن  $\frac{1}{1000} = \frac{1}{1000} = \dots = 0$  وحاصل جمع الحدين الأول والثالث  $1.0005$  والثلاثة الحدود الأولى  $1.0005001$  والأربعة الأولى  $1.00050001$  وكل حد في هذه المتسلسلة أصغر من جزء من الألف من الحد الذى قبله مباشرة وعلى ذلك تكون النتيجة صحيحة إلى عشرة أرقام عشرية رغم أننا لم نستعمل إلا ثلاثة حدود فقط من المتسلسلة.

والحدى متبايلات هذه المجموعة لها أهمية عظيمة في الرياضيات الحديثة. وهي تؤدي بنا إلى العدد الضعيف الذى ذكرناه في ص ١٧٧ وهو أساس ما يسمى

باللغزاتيات والطبيعة . . إن أفضل اللوغاريتمات الحديثة محسوبة إلى أكثر من عشرين رقفاً . وإذا أردنا الحصول على درجة من الدقة تماثل ذلك باستعمال طريقة بريجنر فإن الجهد اللازم يكون فوق طاقة البشر . ويمكن اقتصاد جزء كبير من هذا الجهد إذا حسبنا أولاً اللوغاريتمات الطبيعية للأساس ه ثم استعملنا القانوين

$$\frac{\log a}{\log b} = \frac{\log a}{\log 10}$$

وتسمى المنسبلة التي تؤدي للأساس ه بالمنسبلة الآسية وهي

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

يرمز مع  $h = 1$  تحصل على قيمة ه . أى أن

$$h = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

وبعد الحدود العشرة الأولى من هذه المنسبلة يصبح كل حد أصغر من عشر الذى قبله مباشرة . وعلى ذلك لا تؤثر إضافة هذا الحد إلى مجموع ما قبله من الحدود إلا في الرقم العشرى السالى لآخر رقم عشرى في هذا المجموع . ومهما أخذنا من الحدود فإن مجموعها لا يتعدى ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨٥ صحيحة عشرة أرقام عشرية . وتكون النتيجة السابقة صحيحة خمسة أرقام عشرية إذا أخذنا مجموع التسعة حدود الأولى فقط . ولا يمكن تمثيل ه بعدد واحد وهي تشبه في ذلك النسبة التقريبية ط . ويمكن استنتاج الخواص المفيدة لهذه المنسبلة بطرق كثيرة ، تعتمد أحدها على نظرية ذات الجدين . ويتصل هذه الطريقة أولاً بطرق التجربة . والمناسبة التي تمثل ه ذات فائدة عظيمة . والسبب في ذلك هو أنه يمكن رفع ه إلى أية قوة بقاعدة بسيطة ( انظر ما ح ٣ ) .

وهذه القاعدة هي

$$(h) = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

فتلا

$$h = \frac{1}{2} (2,71828 \dots)$$

$$1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

ويمكن أن يرى القارئ بنفسه سرعة تقارب هذه المنسبلة إذا حصل على مجموع الحدود الأولى التي عددها ن عديد ما به  $2,71828 \dots$  وهي في هذه الحالة لا يفرق مطلقاً في الرقم العشرى الناتج عن إضافة الحد السابق . وعلى ذلك يكفي أن تأخذ الحدود الستة الأولى من المنسبلة الآسية لحصل على الجذر الخامس للقياس ٢,٧١٨٢٨ صحيحاً إلى ستة أرقام معنوية . وباستعمال النظرية الآسية في حساب اللوغاريتمات نقصد كثيراً من الجهد وسنقابل فيما بعد منهجية أخرى تصبح بواسطتها حساب اللوغاريتمات بسيطاً للغاية . وتسمى هذه الأخيرة بالمنسبلة اللوغا . ونستعملها لإيجاد هذه المنسبلة تقارباً بالتقريب ط .

لقد أوضحت البيا نظرية ذات الجدين بالمنسبلة الآسية . فتلا

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 2 + \frac{1}{n} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 3 + \frac{1}{n} + \dots$$

$$(1 + \frac{1}{n})^n = 4 + \frac{1}{n} + \dots$$

وعندما تكون ن صغيرة جداً في المقادير السابقة ، تصبح  $h = 2,71828 \dots$  الخ

أصغر بكثير جداً من ن ، فتلا

$$h = \frac{1}{2} (2,71828 \dots)$$

$$h = \frac{1}{2} (2,71828 \dots)$$

وعلى ذلك نحصل على تقريب جيد جدا عندما تكون  $n$  صغيرة إذا أخذنا

$$(1 + n)^1 = 1 + n$$

$$(1 + n)^2 = 1 + 2n$$

$$(1 + n)^3 = 1 + 3n$$

وجودة التقريب في النتيجة العامة

$$(1 + n)^4 = 1 + 4n$$

تتوقف على مقدار صغر  $n$  وكبره

فتلا إذا كانت  $n = 1/6$  فإن  $(1 + n)^2 = 1.11$  و  $(1 + n)^3 = 1.21$

والتقريب الأول يعطى  $1.2$  وهي قيمة أصغر من النتيجة الصحيحة بأقل من  $1/6$

ومن المبدء القارىء أن يختار القيم الآتية للتقدير  $(1 + n)^4$  بنفسه

من  $n$   $(1 + n)^4$  النسبة المئوية للخطأ

٢	١	١.٢١	١.٢	٨
٣	١	١.٢٣١	١.٢	٣
٤	١	١.٤٦٤١	١.٤	٤
٥	١	١.٢٠١	١.٢	١
٦	١	١.٣٠٣١	١.٣	٣
٧	١	١.٤٠٦٠٤٠١	١.٤	٤

وبلاحظ القسارى من الحدود السابق أن الخطأ الناتج من استعمال هذا

القانون الرياضى التقريبى يكون أكبر دائما في حالة القوى الكبيرة منه في حالة

القوى الصغيرة إذا أخذت  $n$  نفس القيمة في الحالتين فتلا الخطأ في قيمة

$(1 + n)^4$  باستعمال القانون التقريبى يساوى تقريبا ستة أمثال الخطأ في قيمة

$(1 + n)^5$  عندما تأخذ  $n$  نفس القيمة في كل من الحالتين. وإذا كانت  $n$  تساوى

نفس هذه القيمة أى  $1/6$  فإن الخطأ في التقريب  $1 + n$  يساوى الخطأ  $(1 + n)^4$

يكون أقل من عشر الخطأ في قيمة  $(1 + n)^2$  عندما تساوى قيمتها الأصلية

أى  $1/6$ . نلاحظ أننا بأخذنا  $1 + n$  من كقريب أول للتقدير  $(1 + n)^4$

نكون قد أعملنا جميع قوى  $n$  التى ليست بين القوسين. إذا أجرينا نفس

العملية للتقدير

$$(1 + n)^2 = 1 + \frac{2n}{12}$$

$$\text{نحصل بوضع } n = 2 \text{ على } (1 + n)^2 = 1 + \frac{2n}{12}$$

$$1 + n + \frac{2n}{12} =$$

$$1 + n + \frac{2n}{12} +$$

$$1 + n + \frac{2n}{12} + \frac{4n}{4} =$$

وبإعمال جميع الحدود التى تحتوى على  $n$  بقوة أكبر من أعلى قوة لها في

التقدير الأصل نحصل على

$$1 + n + \frac{2n}{12} + \frac{4n}{4} + \frac{8n}{8} = (1 + n)^4$$

$$1 + n + \frac{2n}{12} =$$

وإذا أجرى القارىء نفس العملية بالتقدير

$$(1 + n)^2 = 1 + \frac{2n}{12}$$

فإنه يجد بعد حذف جميع قوى  $n$  من  $6$  أن من الممكن اختصار المقدار إلى





وعلى ذلك لن يدهش القارىء إذا وجد أن من الممكن إضافة عدد كافٍ من هذه الجذور أن نجعل س تقترب بأية درجة من الواحد الصحيح وأن نحصل بالرغم من ذلك على نتيجة جيدة. وعندما تكون  $s = 1$  تأخذ المتسلسلة الأسية اللانهائية

$$1 + s + \frac{s^2}{1!} + \frac{s^3}{2!} + \frac{s^4}{3!} + \dots$$

الصورة

$$1 + 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

وكان لاحظنا، لا يمكن أن يتعدى مجموع هذه السلسلة الأخيرة قيمة نهائية معينة هي ٢,٧١٨٢٨٠٠ صحيحة إلى ستة أرقام معنوية وبفرض صحة النتيجة عند  $s = 1$  فإن:

$$(2,7182800) = 1 + s + \frac{s^2}{1!} + \frac{s^3}{2!} + \frac{s^4}{3!} + \dots$$

وسنوضح أن في الامكان جعل قيمتي طرفي المعادلة السابقة تقتربان من بعضهما بأية درجة مطلوبة نتيجة لإضافة أرقام عشرية جديدة إلى المقدار الآمين وجذور جديدة على الصورة  $\frac{s^k}{k!}$  إلى الأسير كما يأتي:

اعتبر جدين فقط: أى

$$1 + s = 2$$

فيكون

$$(1 + s)^2 = 2^2 = 4$$

$$16 = 2 + s = 2 + 14$$

الفرق بين  $(1 + s)^2$  و  $2 + s$  هو ١٤، بنفس الطريقة يمكننا

عمل الجدول الآتي:

الخطأ	المجموع	القيمة المقربة	القيمة الحقيقية
٢٥	٣	$\frac{1}{2} + 1$	$2(1 + 1)$
٢٠	٥	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$	$2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)$
١١	١٥	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$	$2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)$
٤,٦	٧	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$	$2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)$
١,٥	٧,٦	$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1$	$2(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1)$



في النصف الثاني من القرن السادس عشر كانت حركة الإصلاح تنبثق في أوروبا  
 كابت الايتراكية التي تمكن في ألمانيا والنمسا في السنوات الأخيرة من القرن  
 التاسع عشر والسنوات الأولى من القرن العشرين ثم أتى بعد ذلك عهد أرهااب  
 سايت بارانوميو في أغسطس سنة ١٥٧٢ . ووصل رد فعل المفكرين إلى أوج  
 كما يحدث في ألمانيا والنمسا اليوم وحتى الأفراد الذين لم يظهروا ولاهم للنظام  
 القديم مثل ديكارت ، لجأوا إلى هولندا وإنجلترا ومنبعها ثم روعي ذلك  
 فقد أدت نزوة الحياة الفكرية للديموقراطيات البروتستانتية الناشئة وذلك  
 بامتصاص زهرة المفكرين الفرنسيين في القرن السابع عشر . وربما تكون  
 روحيا اليهودية شديدة من ثروتها بنفس الطريقة على حساب العظم الاجتماعي  
 المبدع . وبدون شك لم تكن إنجلترا أو هولندا أو مسعمراتها الأمر بكتبة  
 بلاداً مثالية للعبادة . والتيء المهر أن النظام الاجتماعي الجديد كان قد بدأ  
 على جنب الفرس للأعمال الفكرية المستمرة وعلى الإنتاج . وبماثل ذلك تماماً  
 استطاعة روسيا السبعينيات القرن والصناعات الحديدية بيتا الدول الرأسمالية  
 تحديد الإنتاج وتقل من الأموال التي تنفق على الأبحاث إلا إذا ساعدت هذه  
 الأبحاث على هلاك الجماعات البشرية . وكان أبوي دي موافر من بين الذين  
 لجأوا إلى إنجلترا واستقروا فيها في القرن السابع عشر . ويطبق الانجليز اسمه  
 بطقاً انجليزيا لا فرنسياً . ويحق لهم أن يصحروا بأن وطهم كان في وقت  
 يعود الجسر البشري نحو المعرفة المختارة .

اكتشف دي موافر بجالا جديداً من الطرق الحسابية باستعمال الزمر  
 الرياضية أو  $v$  . كما يستعمل ديوفانتس الزمر  $w = 1$  من قبل . وكانت  
 النظرية التي تحل اسمه نظرية دي موافر . فاقعة باب جديداً في علم الجبر  
 الحديث مثلاً في ذلك مثل قانون الإشارات الذي بدأ عهداً جديداً في علم  
 الجبر القديم وقواعد استعمال لـ  $v$  الأساسية مبنية على قانون الإشارات  
 نفسه فإذا كان

$$v = 1 \\ \text{فإن } v^2 = (1 - v) = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$

$$v^2 = 1 - v \\ \text{أي } v^2 = 1 - v$$



في نحو منتصف القرن السادس عشر كانت حركة الإصلاح تتمكّن في فرنسا  
كانت الانتراكية تتمكّن في ألمانيا والانترا في السويد الأخيرة من القرن  
التاسع عشر السونات الأولى من القرن العشرين. ثم أتى بعد ذلك عهد أرهاي  
سانت بارنولديو في أغسطس سنة ١٥٧٢. ووصل رد فعل المفكرين إلى أوجه  
كما يحدث في ألمانيا والنمسا اليوم وحتى الامداد الذين لم يظهروا ولا هم للظلم  
القديم مثل وبكار. ولجأوا إلى هولندا وإنجلترا ومينعراهما. وعلى ذلك  
فقد زادت أزمة الحياة الفكرية للديموقراطيات البروتستانتية الناشئة وذلك  
بامتصاص أرواح المفكرين الفرنسيين في القرن السابع عشر. وربما يتكون  
روسيا السوفيتية تنريد من أرواحها بنفس الطريقة على حساب النظام الاجتماعي  
المتناهي. وبدون شك لم تكن إنجلترا وهولندا أو مستعمراتها الأمر بكمية  
بلاذاً مثالية العناية. والتي المبر. هو أن النظام الاجتماعي الجديد كان قدراً  
على جلب الفرض للاعمال الفكرية الممتارة وعلى استعماها. وتماثل ذلك تمايلاً  
استطاعة روسيا استيعاب الفنون والصناعات الهندسية بتأثير الدول الرأسمالية  
تحدد الإنتاج وتقل من الأموال التي تنفق على الأبحاث إلا إذا ساعدت هذه  
الأبحاث على هلاك المجموعات البشرية. وكان أبوي دي موافر من بين الذين  
لجأوا إلى إنجلترا واستقروا بها في القرن السابع عشر. وينطق الانجليزية لبعته  
نطقاً انجليزياً لا فرنسياً. ويحق لهم أن يصحروا بأن وطنهم كان في وقت ما  
يقود الطبيب البشري نحو المعرفة المشتركة.

التي تكتب دي موافر مجالا جديداً من الطرق الحسابية باستعمال الرمز  
الرياضي  $y$  أو  $v$  كما استعمال ديوفانتس الرمز  $x$ . من قبل. وكانت  
النظرية التي تمحل اسمها. نظرية دي موافر. فاعمة باب جديدي في علم الجبر  
الجديد مثلها في ذلك مثل قانون الانشارات الذي بدأ عهداً جديداً في علم  
الجبر القديم وقواعد استعمال  $v$  الأساسية مبنية على قانون الإشارات  
نفسه. فإذا كان

$$y = v = \sqrt{1-v} \\ \text{فإن } y^2 = (1-v) = 1 - v \\ y^2 = (1-v) \times y = y - v$$

$$1 + y = 1 + \sqrt{1-v} = 1 + y \\ 1 + y = 1 + \sqrt{1-v} = 1 + y$$

ويكتبها  
 $y^2 = (1-v) \times y = y - v$   
 $y^2 = (1-v) \times y = y - v$   
 وتبين نظرية دي موافر نظرية ذات الخدين العبر الجبر في أنها قاعدة  
 أربع كيفية معينة إلى أين معين يزوم له بالمؤثر البرمجية في الركن العلوي  
 الأيسر من القوسين. وهذه النظرية هي

$$(1 + y)^2 = 1 + 2y + y^2$$

ويعتبر ألا يشعل القاري نفسه في الزايف الحاصر بمعنى هذا القانون.  
 بمعنى عدة معينة في الرياضة هرايم عبارة تسمى اتفاقها مع قوانين الجبر. أو  
 عبارة تسمى كيفية استعمالها. فلو لا اتفق لنفسك بأن هذا القانون يتفق مع ما  
 نعلمه عن الجيوب. جديب الخدم. الكميات السالبة. والجذور الزائدية والقيوي  
 ومن الضروري القوي أن يتذكر التوضيح الذي أعطيناوه في الباب السادس  
 من ٢٥١. وهو

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

لا بد أن ذلك تم أجراً جديداً في باب العبر القيد  
 (جدا ١ - ج ١)

يحد أن

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

$$1 + y^2 = 1 + y^2$$

ولكننا نعلم أن:

$$جا١٢ = جا(١+١)$$

$$٢ = جا١جتا١ (ص ٢٥١)$$

$$٢ = جا١جتا١ = جا٢$$

يمكن بعد ذلك كتابة النتيجة على الصورة

$$جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

وجئت أن  $\sqrt[3]{6}$  يمكن كتابته هذا

$$جا١ - جا٢ + جا٣ + جا٤$$

ولكننا نعلم أن:

$$جا١٢ = جا(١+١)$$

وعلى ذلك يكون

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢$$

أي أن النظرية صحيحة عندما  $n=٢$  وإجراء عملية الضرب نجد أن

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

وباستعمال القاعدة الموجودة على ص ٢٥٠ نجد أن:

$$جا١٢ = جا(١+٢)$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

وبالمثل

$$جا١٢ = جا(١+٢)$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

وعلى ذلك يمكننا أن نكتب

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

أي أن النظرية صحيحة عندما  $n=٣$ ، وبقيس الطريقة نصل إلى النتيجة

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

وهذه القاعدة التي نسميها نظرية دي موافر، تكون صحيحة أيضا للقوى

الكسرية والسالبة لذا

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

ولكننا نعلم أن:

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

$$(جا١ + جا٢) = جا١٢ = جا١ + جا٢ + جا٣ + جا٤$$

فيكون

$$(أ ح ا + ب ح ا + ج ح ا) = ٧ (أ ح ا + ب ح ا + ج ح ا)$$

$$= ج ا ب + ح ا ب$$

ويجب أن يكون حريصين هنا لأن:

$$(ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب) = ٧ (ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب)$$

$$ي ج ا (ب + ج + ح)$$

$$= ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

ويمكن للقارى أن يتحقق بسهولة من أن

$$ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب لا تساوى ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

وعلى ذلك تكفى بأن نقول بأن إحدى قيم المقدار  $\sqrt{ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب}$ 

$$هي ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

وإذا كانت  $٧$  عدداً صحيحاً فإنه توجد  $(٧ - ١)$  قيمة أخرى

$$ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

حيث

$$٣٦٢٦١ = ٧ - ١$$

لقد تساءل الطفل الذى يعيش على الإحسان في إحدى روايات ديككنز،

بعد أن انتهى من حفظ الحروف الأبجدية ما إذا كان من الحكمة تجسيم كل هذا

التعب للحصول على هذه المكافأة البسيطة. وربما طرأ نفس السؤال على ذهن

القارى. ولذلك سنبداً الآن في توضيح كيف نستفيد من نظرية دى موافر

في اختصار الجهود اللازم لعمل جدول نسب مئوية. ويتضمن لهذا الغرض أن نفرض أثر خطأنا السابقة. لقد وجدنا أن

$$ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب = ١٣$$

ويمكن كتابة ذلك

$$ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب = ١٣ (ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب)$$

$$= ١٣ (ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب)$$

$$= ١٣ (ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب)$$

وظهنا يمكننا الحصول على صورة النتيجة، التي استعملت في إثبات نظرية

دى موافر، باستعمال هذه النظرية. وإذا كان

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

بالمثل يمكننا أن نكتب

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$١ = ج ا ب + ح ا ب + ج ا ب$$

$$٦ \text{ س} - \frac{١}{٥} = \frac{١}{٥} \text{ س} + ٢ \text{ ح ا ب}$$

أي أنه إذا كان

$$\text{س} + \frac{١}{٥} = ٢ \text{ ح ا ب}$$

فإن

$$\text{س} + \frac{١}{٥} = \frac{١}{٥} \text{ ح ا ب}$$

فإذا أردنا قيمة ح ا ب بدلالة ح ا ب نضع

$$٢ \text{ ح ا ب} = \text{س} + \frac{١}{٥}$$

$$٢ \cdot ٢ \text{ ح ا ب} = \text{س} + \frac{١}{٥}$$

$$(٢ \text{ ح ا ب}) = (٢ \text{ ح ا ب})$$

$$٨ \text{ ح ا ب} = \text{س} + \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{١}{٥} \times ٢ + \frac{١}{٥} \times ٢$$

$$= (٢ \text{ ح ا ب}) + (٢ \text{ ح ا ب}) + (٢ \text{ ح ا ب})$$

$$٨ \text{ ح ا ب} = ٦ \text{ ح ا ب}$$

$$٨ \text{ ح ا ب} - ٦ \text{ ح ا ب} = ٦ \text{ ح ا ب} - ٦ \text{ ح ا ب}$$

$$٢ \text{ ح ا ب} = ٠$$

وهي نفس النتيجة التي استعملت من قبل. ولكني يفتتح القاري بإمكان استعمال استكبان التخيلية في الحسابات، فنكتب

$$(١ + \frac{١}{٥}) = (١ + \frac{١}{٥})$$

$$١٠ \text{ ح ا ب} = ١٠ \text{ ح ا ب} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب}$$

$$\frac{١}{٥} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب} + \frac{١}{٥} \times ١٠ \text{ ح ا ب}$$

$$= (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥})$$

$$١٠ + (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥}) + (١ + \frac{١}{٥})$$

$$٢٠ + ١٢ \text{ ح ا ب} + ١٤ \text{ ح ا ب} + ١٦ \text{ ح ا ب} + ١٨ \text{ ح ا ب}$$

$$١٠ - ١٢ \text{ ح ا ب} = ١٠ - ١٢ \text{ ح ا ب} + ١٤ \text{ ح ا ب} - ١٤ \text{ ح ا ب} + ١٦ \text{ ح ا ب} - ١٦ \text{ ح ا ب} + ١٨ \text{ ح ا ب} - ١٨ \text{ ح ا ب}$$

ويمكن للقاري اختبار صحة هذه النتيجة باستعمال قيمتين معلومتين المقدار ح ا ب أو ح ا ب (١) ح ا ب = ٩٠ (ب) ح ا ب = ٦٠

$$(١) \text{ ح ا ب} = ٩٠ \text{ ح ا ب} = ٩٠ \text{ ح ا ب} - ٩٠ \text{ ح ا ب} + ٩٠ \text{ ح ا ب} - ٩٠ \text{ ح ا ب} + ٩٠ \text{ ح ا ب} - ٩٠ \text{ ح ا ب} + ٩٠ \text{ ح ا ب} - ٩٠ \text{ ح ا ب}$$

$$١٠ - (١ - ١) = (١٠ + ١٨٠) - ١٠ - (١ - ١) = ١٨٠ - ١ = ١٨٠$$

$$(٢) \text{ ح ا ب} = ٦٠ \text{ ح ا ب} = ٦٠ \text{ ح ا ب} - ٦٠ \text{ ح ا ب} + ٦٠ \text{ ح ا ب} - ٦٠ \text{ ح ا ب} + ٦٠ \text{ ح ا ب} - ٦٠ \text{ ح ا ب} + ٦٠ \text{ ح ا ب} - ٦٠ \text{ ح ا ب}$$

$$١٠ - (١ - ١) = (١٠ + ١٨٠) - ١٠ - (١ - ١) = ١٨٠ - ١ = ١٨٠$$

$$١٠ - (١ - ١) = (١٠ + ١٨٠) - ١٠ - (١ - ١) = ١٨٠ - ١ = ١٨٠$$

$$١٠ - (١ - ١) = (١٠ + ١٨٠) - ١٠ - (١ - ١) = ١٨٠ - ١ = ١٨٠$$

$$١ = ١$$

وحيث أن لدينا الآن من الأسباب ما يجعلنا نأمل في إمكان اختيار العمليات الحسابية التي نحوي على  $\frac{١}{٥}$  أو  $\frac{١}{٥}$ ، فنبتهل هذا العدد التخيلي

للحصول على المتسلسلة المستعملين في إيجاد قيمة جيب أية زاوية بأية درجة مطلوبة من الدقة. لقد رأينا كيف أن دراسة حساب المثلثات التي نشأت عن الحاجة للجداول الملاحية، أثارت البحث عن طرق حسابية سريعة وكيف أن اكتشاف اللوغاريتمات قادنا إلى دراسة المتسلسلات اللاهائية مثل المتسلسلة الأسية مثلا. وقد ترجت الاكتشافات التي نتجت الملاحظات السكرى باكتشاف ارتباط بسيط بين المتسلسلة الأسية ونظرية دي موافر. وكانت نتيجة هذا الاكتشاف تبسيطاً جديداً في الجبر الذي ينفذ في عمل جداول النسب المثلثية. تلك الجداول التي بنيت على الهندسة الإغريقية والتي كانت تستعمل في تعيين مواضع السفن وفي إنشاء الخرائط. وتوضح العلاقة بين نظرية دي موافر والمتسلسلة الأسية كما يأتي: ضع

$$س = ح + ١ + ح١$$

وهو نفس ما نحصل عليه إذا وضعنا  $١ = ١$  في نظرية دي موافر. وإذا كتبنا  $١$  بدلا من  $١$  لتبدل على أي عدد، فإن

$$س = ح + ح١ + ح١١ \quad (١)$$

$$س = ح + ح١ - ح١١$$

وكما سبق يمكننا أن نكتب

$$س = ح + ح١ = ح١١ + ح١١١$$

ويمكننا أيضا أن نضع  $س$  على هيئة إحدى قوى  $هـ$  مثل

$$س = هـ$$

$$أو \quad س = ١ + ح١ \quad (٢)$$

باستعمال المتسلسلة الأسية نجد أن

$$س = ١ + ح١ + ح١١ + ح١١١ + ح١١١١ + ح١١١١١ + \dots$$

$$س = ١ + ح١ + ح١١ + ح١١١ + ح١١١١ + \dots$$

وبطرح البنىل من العليا نجد أن:

$$س - س = ١ - ح١ + ح١١ - ح١١١ + ح١١١١ - \dots$$

أو

$$١ - ح١ + ح١١ - ح١١١ + ح١١١١ - \dots$$

$$(٣) \quad ١ - ح١ + ح١١ - ح١١١ + ح١١١١ - \dots$$

وحيث أن زاوية اختياريّة، فإن هذه المعادلة تبقى صحيحة عندما تكون  $١$  صغيرة بحيث يمكن إهمال أي حد تكون إحدى عوامله أي أن

$$س = ١ + ح١ + ح١١ + ح١١١ + \dots$$

ولكننا نعلم أنه إذا دلت  $١$  على نصف القطر (أنظر الباب السادس ص ٢٦٠)

وكانت صغيرة جداً فإن

$$١ = \frac{ح١}{١}$$

$$١ = \frac{ح١}{١}$$

فيكون:

$$١ = س$$

$$س = هـ$$



النتيجة تعود به إلى الباب السادس ص ٢٢٢ . حصلنا باستعمال هندسة إقليدس على القيم

$$\text{حأ}^{\circ} = ٩٦٦$$

$$\text{حأ}^{\circ} = ٢٥٩$$

التي تمكن من استعمال المتسلسلات التي وجدناها بإلزامنا إيجاد قيمة  $١٥^{\circ}$

بالنقد الدائري

$$١٥^{\circ} = \frac{1}{4} \times 90^{\circ} = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{2} \text{ دائرة}$$

$$\text{ولذا أخذنا } \text{حأ}^{\circ} = ٣,١٤١٦ \text{ فإن } ١٥^{\circ} = ٢,٦١٨ \text{ دائرية}$$

$$\text{بوضع } ٢ = ٢,٦١٨ \text{ يكون}$$

$$١ = ٠,٦٨٥$$

$$٢ = ٠,١٧٩$$

$$٣ = ٠,٠٥$$

الخ...

ويكون

$$\text{حأ}^{\circ} = ١ - \frac{٠,٦٨٥}{٢} + \frac{٠,٠٥}{٢٤} \dots$$

$$٦ \text{ حأ}^{\circ} = ١ - \frac{٠,١٧٩}{٦} - ٢,٦١٨$$

وتقارب هذه المتسلسلات بسرعة عظيمة لدرجة أنه لا يلزمنا إلا الحدين

الأول والثاني للحصول على النتيجة

$$\text{حأ}^{\circ} = ٩٦٦$$

$$\text{حأ}^{\circ} = ٢٥٩$$

## التحليل الرياضي للتحجرات

يرى القارئ الآن أن العدد التخيلي ليس إلا شيء من ابتداء الخيال يساعدته بمكبسا عمل جداول تستخدم في إيجاد خطوط عرض وطول البواجر وتظهر المعادلة

$$\text{ه} = ١ + \text{حأ} + \text{حأ}^٢$$

التي تحتوي على هذا العدد التخيلي في حسابات التيار المقطع الذي هو أساس الإضاءة والحاجة الحديثة

منه تعدى مؤلفنا ظهور فرع جديد من فروع الرياض هو التحليل الرياضي للتحجرات . وقد تكبر هذا الفرع على الخصوص لإدراكه الظواهر التكوينية التي اكتشفها لأول مرة داراداي في أوائل القرن التاسع عشر . والمنهج ، هو كلمة لها اتجاه معين من نقطة ثابتة فضلا عن بعد معين من هذه النقطة . يمكن تمثيل درجات الحرارة والقوى والجذب المغناطيسي والتكوين . وما يشابهها بأبعاد . بالمثل يمكن تمثيل كل من الحرارة والقوى التي تعمل على إزاحة جسم في اتجاه معين والمحاج المغناطيسية والتكوينات ينتج . وقد يوضح استعمال المتحجرات خيرا له أهمية الكبرى في تاريخ الرياض . إن الزمن الطويل الذي مضى على إشكثار قواعد الهندسة والجبر جعلنا معرضين أن ننسى أهاقيد ابتكرت لدول البعث في مثل حقيقة في الحياة الاجتماعية والعملية . ويجبر المتحجرات لم يتدهأ إلا أبعد حاجة الحياة الاجتماعية إلى قياس ظواهر جديدة ولذا يصعب إحصاء أن المتحجرات مهي إلا اصطلاحات تخوية تستعمل للحاجات الجنس الإنساني المنظم اجتماعياً .

في الباب الأول استعملنا جزأ صغيراً مكملاً من خزان ومكبس أوتوماتيك لنوضح أن قاعدة الجمع العادة لا تسمى دائماً في الحياة الحقيقية . في الشكل الموجود على ص ٢٥ ، لا تساعدنا قواعد الحساب البسيط على معرفة ما يحويه الخزان إذا أصبحت كمية معلومة من الماء إلى ما فيه فعلا . ولو تسمر على استعمال الإشارة + للدلالة على الإضافة في الحياة الواقعية ، سيؤزم لإيجاد

قوانين جديدة مختلفة مثل

$$٢ = ١ + ٢ \quad ٦ \quad ٢ = ٢ + ٤$$







حسب صحة نتائجك بإجراء عملية الضرب العادية  
(٣) احسب المتبادر الآتية باستعمال اللوغاريتمات

$$\frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2}$$

$$\frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2}$$

$$\frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2} \div \frac{(78,91)^2}{(1,003)^2}$$

من ٩ إلى ٩٠. نتيجة في الصف الآف في المار بالعدد ٩٨ حتى تصل إلى العنود  
الموجود تحت الرقم ٠٧ العدد الموجود في هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو  
الجزء العشري في لوغاريتم ٩٨٧. ولوجود الرقم الأخير ٦ ننظر في الجانب  
الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد في أعلاها أرقام بين ٩٦١  
والأعداد الموجودة في هذه الأعمدة تتدلى على ما يجب إضافة إلى الجزء  
العشري فنظر الوجود الرقم الرابع في العدد الأصلي في الحالة التي نتجتا وجبنا  
الجزء العشري لللوغاريتم العدد ٩٨٧. وتريد أن نعلم ماذا نضيف إليه للحصول  
على الجزء العشري لللوغاريتم العدد ٩٨٧. وبالنظر في أقصى يسار الصف  
الآف في المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود في العمود الذي أعلاه الرقم ٦  
هو ٣. وبما ذلك يكون الجزء العشري المطلوب هو ٠.٠٠٣.

$$0.9943 = 0.003 + 0.9913$$

وإذا كان المطلوب هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل للنتيجة  
عكس العملية السابقة. فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذي لوغاريتمه ٣.٠٢٧٦ كما يأتي  
عبر أول الجزء العشري ٠.٢٧٦. يمكننا استعمال جدول لوغاريتمات أو  
جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لمثل هذا الجزء  
العشري هي ٢٤٤٣. ونحسب أن العدد البالي ٣ في العدد يقع بين ١٠٠  
و ١٠٠٠. وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٠.٢٤٤٣.

(١) أوجد حواصل الضرب الآتية:

$$\begin{aligned} \text{جاء ١} &= \text{جاء ٢} + \text{جاء ٣} + \text{جاء ٤} + \text{جاء ٥} + \text{جاء ٦} + \text{جاء ٧} + \text{جاء ٨} + \text{جاء ٩} \\ \text{جاء ١} &= \text{جاء ٢} + \text{جاء ٣} + \text{جاء ٤} + \text{جاء ٥} + \text{جاء ٦} + \text{جاء ٧} + \text{جاء ٨} + \text{جاء ٩} \\ \text{جاء ١} &= \text{جاء ٢} + \text{جاء ٣} + \text{جاء ٤} + \text{جاء ٥} + \text{جاء ٦} + \text{جاء ٧} + \text{جاء ٨} + \text{جاء ٩} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 368 &= 2412 \div 6.6 \\ 368 &= 2412 \div 6.6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 368 &= 2412 \div 6.6 \\ 368 &= 2412 \div 6.6 \end{aligned}$$

(٣) أوجد جذر ١٠٠٤ العاشر ٦ جذر ٦٥٦١ الثامن ٦ جذر ٢٥١١٦١  
التمام باستعمال اللوغاريتمات واحسب صحة النتيجة بإجراء عمليات الضرب

(٤) بالرسم المجهز من لو. ب. س.  
(٥) لا ينبغي أن استعمال اللوغاريتمات ببساطة على سرعة إجراء عمليات  
الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد لو (١ + ب) ٦  
وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة  $10.1 \sqrt{2}$  يجب إحد

$$\begin{aligned} (1) & (48,24) + (33,91) \\ (2) & (10.1 \sqrt{2}) = (10.1 \sqrt{2}) \end{aligned}$$

$$(3) (0.9437) = (0.9437)$$

(٦) احسب ما يأتي مستعملا جداول اللوغاريتمات

(١) أوجد القاعدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه في سنة سنوات بسنة ٤

(ب) ما هو الزمن الذي يلزم لكي تضاعف  
القاعدة المركبة ١٠ ٪ في السنة

(ج) أوجد القاعدة المركبة لمبلغ ٤٠٠ جنيه في سنة سنوات بسنة ٣

خبر صفة نتائجك بإجراء عملية الضرب العادية

$$(2) \text{ احسب المقدار الآتية باستعمال اللوغاريتمات}$$

$$\frac{(78.91)^2}{(1.03)^2} \div 2.71 \div 9.437 \div 484 \div 3.7 \times (1.1)$$

٤٨

(٣) أوجد جذر ١٠٢٤ العاشر ٦ جذر ٦٥٦١ الثامن ٦ جيلدر ٣٥١١١

تأمل باستعمال اللوغاريتمات وأخبر بصفة النتيجة بإجراء عمليات الضرب

(٤) أرسم المربع = لو .

(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة إجراء العمليات

الضرب والقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد  $(1 + 2 + 3 + \dots + 100)$

وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة  $1 + 2 + 3 + \dots + 100$  يجب إيجاد

صفة كل حد على حدة

$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

١ - ٢ - ٣ - ٤ - ٥ - ٦ - ٧ - ٨ - ٩ - ١٠

(١) (٢) (٣) (٤) (٥) (٦) (٧) (٨) (٩) (١٠)

بلغ معنى إذا كان سبع

٢٣

بصفة في ستة جيلدر

(د) أوجد القاعدة المركبة للمبلغ ٤٠٠

من ١٠ إلى ٩٠ . نبحث في الصف الألفي المار بالعدد ٩٨ حتى نصيب إلى العمود الموجود تحت الرقم ٧٠ . العدد الموجود في هذا المكان هو ٩٩٤٣ . وهذا هو الجزء العشري في لوغاريتم ٩٨٧ . ولوجود الرقم الأخير ننظر في الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد في أعلاها أرقام بين ٩٦١ والأعداد الموجودة في هذه الأعمدة تدلنا على ما يجب إضافته إلى الجزء العشري فنظرنا لوجود الرقم الرابع في العمود الأصلي . في الحالة التي بحثنا وجدها الجزء العشري للوغاريتم العدد ٩٨٧ . وزيد أن نعلم ماذا نضيف إليه لحصل على الجزء العشري للوغاريتم العدد ٩٨٧٦ . وبالنظر في أقصى يسار الصف

الألفي المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود في العمود الذي

هو ٣ . وعلى ذلك يكون الجزء العشري المطلوب هو

$$0.9943 + 0.0003 = 0.9946$$

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل له بالتراجع بنفس العملية السابقة . فمثلا يمكننا إيجاد العدد الذي لوغاريتمه ٢.٣٧٦ كما يأتي

عبر أولا الجزء العشري ٠.٣٧٦ . يمكننا باستعمال جيبول لوغاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المقابلة لجزءنا الجزء العشري هي ٢٤٢ . وحيث أن العدد البشري ٢ فإن العدد يقع بين ١٠٠ و ١٠٠٠ . وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٢٤٢ .

(١) أوجد خواصل الضرب الآتية

أولا باستعمال القانون

حتم ١ حتم ٢ = حتم ١ + حتم ٢ + حتم ٣

ثانيا باستعمال القانون

حتم ١ حتم ٢ = حتم ١ + حتم ٢ + حتم ٣

(انكلا) باستعمال جدول اللوغاريتمات

(١) ٣٦٨ × ٤١٣

(د) ٤٦١٢ × ٣١٥٠٥

(١) ٣٧٨ × ٥٠٤

(ب) ٨٧٢٦ × ٣٧١

$$(1,1) \times \overline{2,2,1}$$

(١) لإبراهيم المعنى،  $\frac{1}{2} \log \frac{1}{2}$  من  
 (٢) لا ينبغي أن استعمال اللوغاريتمات بساعدنا على سرعة إجراء عمليات  
 ضرب والقيمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد  $\log(1 + \frac{1}{2})$   
 وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة  $1 - 1.0117$  فوجب إيجاد  
 قيمة كل حد على حدة  
 أحد قيمة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ج)  $(0.5437) - (0.3276)$   
(٦) احسب ما يأتي مستعملا جداول التوزيعات  
(١) أوجد الفائدة المركبة لمبلغ ١٠٠٠ جنيه في  
في السنة  
(ب) عاوه الرمن الذي يلزم لكي تضاعف  
الفائدة المركبة ١٠ % في السنة

(ج) أوجد القائمة المركبة للبلع ٤٠٠ جنيه إن كانت سنوات عمر

[illegible]

الرقم ٢١

$$.9987 = .9983 + .0004$$

وإذا كان المعلوم هو الوغاريق، فيمكن الحصول على العدد المقابل للدياناج  
فيكون العملية السابقة، فمثلا وكما إيجاد العدد الذي لوغاريتمه ٢٠٣٧٧٦، بأن  
غير أولاً الجزء العشري ٠,٣٧٧٦، ثم يمكننا باستعمال جدول لوغاريتمات أو  
جدول أعداد مقابلة لوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة للجسيلا الجزء  
العشري هي ٢٤٢٤. ونجيب إذن العدد الدياناج ٢٠٣٧٧٦ عن العدد يقع بين ١٠٠٠  
و١٠٠٠٠. وبهذا ذلك العدد المطلوب = ٢٤٢٤.

(١) أوجد خواص المضرب الآتية

ولا باستعمال القانون

ح<sub>1</sub> ح<sub>2</sub> =  $\frac{1}{2}$  ح<sub>1</sub> (1 +  $\frac{1}{2}$ ) +  $\frac{1}{2}$  ح<sub>2</sub> (1 -  $\frac{1}{2}$ )

ثانياً : باستعمال القانون

ح<sub>1</sub> ح<sub>2</sub> =  $\frac{1}{2}$  ح<sub>1</sub> (1 +  $\frac{1}{2}$ ) +  $\frac{1}{2}$  ح<sub>2</sub> (1 -  $\frac{1}{2}$ )

ثالثاً : باستعمال جدول الفرعيات

$$\begin{array}{r} 278 \times 0.512 (7) \\ 87.12 \times 2.100 (5) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 10.5 \times 2.438 (1) \\ 25.1 \times 1.431 (-) \end{array}$$

خبر صحة نتائجنا بجراء عملية الضرب العادية

$$(2) \text{ احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات}$$

$$\sqrt[3]{(1,003)^2} \quad (78,91)^2 \quad 28990,3 \div 271,0 \quad \sqrt[3]{0,7410}$$

$$9,437 - 484 = 8953$$

$$(1,1) \times 2737 = 2910,7$$

أوجد جدر ١٠٢٤ العاشر 6 جدر ٦٥٦١ الثامن 6 جدر ١٠١١

(3) أوجد جدر ١٠٢٤ العاشر 6 جدر ٦٥٦١ الثامن 6 جدر ١٠١١

الآن باستعمال اللوغاريتمات وأجبر صحة نتيجة بجراء عمليات الضرب

(4) أرسم المخطط من ١ إلى ١٠

(5) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدها على سرعة إجراء عمليات الضرب وأقسمة فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد لو (١ + ب) 6

وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة  $10^{1,07} = 11,7$  فستأخذ قيمة كل جد على حدة أو جد قيمة

(1) أوجد جداول الضرب الآتية

(2) أوجد جداول الضرب الآتية

(3) أوجد جداول الضرب الآتية

(4) أوجد جداول الضرب الآتية

(5) أوجد جداول الضرب الآتية

(6) أوجد جداول الضرب الآتية

(7) أوجد جداول الضرب الآتية

(8) أوجد جداول الضرب الآتية

(9) أوجد جداول الضرب الآتية

(10) أوجد جداول الضرب الآتية

من ٩ إلى ٩. نبحث في الصف الأفقي المار بالعدد ٩٨ حتى نصل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٧. العدد الموجود في هذا المكان هو ٩٩٤٣. وهذا هو الجزء العشري في لوغاريتم ٩٨٧. ولوجود الرقم الأخير ٦ نظر في الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد في أعلاها أرقام بين ٩٦١ والأعداد الموجودة في هذه الأعمدة تدل على ما يجب إضافته إلى الجزء العشري نظراً لوجود الرقم الرابع في العدد الأصلي. في الحالة التي نبينها وجدنا الجزء العشري للوغاريتم العدد ٩٨٧. وزيد أن نعلم ماذا نصف إليه الجدا على الجزء العشري للوغاريتم العدد ٩٨٧٦. وبالنظر في أقصى يسار الصف الأفقي المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود في العمود الذي أعلاه الرقم ٦ هو ٣. وعلى ذلك يكون الجزء العشري المطلوب هو

$$0,9943 + 0,0003 = 0,9946$$

وإذا كان المعلوم هو اللوغاريتم، فيمكن الحصول على العدد المقابل له بالاتباع عكس العملية السابقة. فمثلاً يمكننا إيجاد العدد الذي لوغاريتمه ٢,٦٢٧٦ كما يأتي اعتبر أولاً الجزء العشري ٠,٦٢٧٦. يمكننا باستعمال جداول لوغاريتمات أو جداول أعداد مقابلة للوغاريتمات أن نرى أن الأرقام المقابلة لمثل هذا الجزء العشري هي ٤٢٤٣. ويجب أن العدد البياني ٤,٢ فإن العدد يقع بين ١٠٠ 6

(1) أوجد جداول الضرب الآتية

أولاً: باستعمال القانون

جا ١ جا ٢ = جا (١ + ٢) + جا (١ - ٢)

ثانياً: باستعمال القانون

جا ١ جا ٢ = جا (١ + ٢) + جا (١ - ٢)

(ثالثاً: باستعمال جداول اللوغاريتمات

$$(4) 378,0 \times 3,432 = 1300,0$$

$$(5) 378,0 \times 3,432 = 1300,0$$

$$(1) 378,0 \times 3,432 = 1300,0$$

$$(2) 378,0 \times 3,432 = 1300,0$$

من ٩ إلى ٩٠. ينتج في الصف الأفقي المار بالعدد ٩٨ حتى تصل إلى العمود الموجود تحت الرقم ٠٧. العدد الموجود في هذا المكان هو ٩٩٤٣ وهذا هو الجزء العشري في الوعاريتم ٩٨٧. ولوجود الرقم الأخير ٦ نظراً في الجانب الأيسر من الجدول حيث توجد عدة أعمدة توجد في أعلاها أرقام بين ٩٦١ والاعتدال الموجودة في هذه الأعمدة تدل على ما يجب إضافته إلى الجزء العشري نظراً لوجود الرقم الرابع في العدد الأصلي. في الحالة التي نبحثها وجدنا الجزء العشري للوعاريتم العدد ٩٨٧ و ٩٨٧٦. وبالنظر في أقصى يسار الصف الأفقي المار بالعدد ٩٨ نجد أن العدد الموجود في العمود الذي أعلاه الرقم ٦ هو ٣. وعلى ذلك يكون الجزء العشري المطلوب هو:

$$٠,٩٩٤٣ + ٠,٠٠٢٠ = ٠,٩٩٦٣$$

وإذا كان المعلوم هو الوعاريتم فيمكن الحصول على العدد المقابل للمناسخ عكس العملية السابقة. فمثلاً يمكننا إيجاد العدد الذي الوعاريتم ٢,٦٣٧٦ كما يأتي اعتبر أولاً الجزء العشري ٠,٦٣٧٦. يمكننا باستعمال جدول الوعاريتمات أو جدول أعداد مقابلة للوعاريتمات أن نرى أن الأرقام المناظرة لمبدأ الجزء العشري هي ٤٢٤٣. ويجب أن العدد الباقى ٢ في العدد يقع بين ١٠٠ و ١٠٠٠. وعلى ذلك يكون العدد المطلوب ٤٢٤٣.

(١) أوجد خواصل القريب الآتية:

أولاً: باستعمال القانون

$$\text{جاء ١} \times \text{جاء ٢} = \text{جاء ١} + \text{جاء ٢} \quad (ب - ١)$$

ثانياً: باستعمال القانون

$$\text{جاء ١} \times \text{جاء ٢} = \text{جاء ١} + \text{جاء ٢} \quad (ب - ١)$$

(٢) أوجد خواصل القريب الآتية:

(أ) $٣٧٨ \times ١٥٠٤$	(ب) $٣٤٧١ \times ٨٧٢١$
(ج) $٤٦١٢ \times ٢١٥٠٥$	

أخيراً صيغة نتائجك بإجراء عملية الضرب العادية

$$(٢) \text{ احسب المقادير الآتية باستعمال اللوغاريتمات}$$

$$\sqrt[٢]{(٧٨,٩١)} \div \sqrt[٢]{(١,٠٠٣)} = ٠,٢٧١ \div ٠,٧٢١ = ٠,٤٣٧$$

$$\sqrt[٢]{(١,٠١)} \times \sqrt[٢]{(١,٠١)} = ١,٠٢٠$$

(٣) أوجد جداول العاشر ٦ جدير ٦٥٦١ الثامن ٦ جدير ٢٥١٢١  
التي من استعمال اللوغاريتمات وأخيراً صيغة النتيجة بإجراء عمليات الضرب

(٤) لرسم المجدى من = لو من  
(٥) لا تنسى أن استعمال اللوغاريتمات يساعدنا على سرعة إجراء عمليات الضرب واقصية فقط ولا توجد طريقة بسيطة لإيجاد لو (١ + ب) ٦ وعلى ذلك إذا أردت حساب قيمة ١,٠١٧ - ١,٠١٧ يجب إيجاد قيمة كل حد على حدة:  
أوجد قيمة

$$(١) (١,٠٢٠) + (١,٠٢٠) = (٢,٠٤٠)$$

$$(ب) (١,٠٢٠) - (١,٠٢٠) = (٠,٠٠٠)$$

$$(ج) (٠,٠٤٠) - (٠,٠٤٠) = (٠,٠٠٠)$$

(٦) احسب ما يأتي مستعمل جداول اللوغاريتمات  
(أ) أوجد القاعدة المركبة للمع ١٠٠٠ جنبه في سنة سنوات البهر ٤ ٪ في السنة  
(ب) ما هو الزمن الذي يلزم لكي يتضاعف مبالغ معين إذا كان بهر القاعدة المركبة ١٠ ٪ في السنة  
(ج) أوجد القاعدة المركبة للمع ٤٠٠ جنبه في سنة سنوات البهر ٣ ٪



## الباب الحادي عشر

### حساب القو والشكل

أو

ما الذي يدور حوله حساب التفاضل

لقد اتفق اختراع اللوغاريتمات مع إدخال هندسة عبد الإصلاح في الستين الأولى من القرن السابع عشر، وهناك تطورات صناعية فرضت نفسها على انتباه الرياضيين في أثناء المدة التالية، وعُتِدَ الطريق لارتقاء علوم الميكانيكا والطرق الحديثة للعمليات الحسابية التي تمهد لتقدم جديد، وكان أحد هذين التطويرين التقدم في استخدام المدفعية، وكان الآخر التحسين في عمل الساعات، وحينئذ تعجب ملك أسباني من دسائس السياسة الأوروبية ليهي سقته في تصميم الساعات كان لهذه كل الجدة التي لعمري السباق وللعمرة الدوارة في جيلنا.

ولمنا في العادة تقسم المسائل الميكانيكية الخاصة بالأجسام الصلبة إلى قسمين، يسمى أحدهما الاستاتيكا، وهو يبحث في كيف يتوازن ثقل مع ثقل آخر حينما يكون الاثنان في حالة السكون، ومن بين التطبيقات الأساسية لميكانيكا السكون مسائل الإجهاد في تصميم المباني. ويقابل الميكانيكا المعمارية أو الاستاتيكا، الديناميكا التي تبحث في دراسة الأجسام المتحركة، وقد استجبت دينا التقدم الاتباعية أعمالا معمارية وأعمال رى تكاد لا تقل عن أي شيء عمله حضارتنا، في الآلة كندرية التي كانت وثيقة الصلة بالمسائل الصناعية التي نبحث عن الأعمال البنائية الواصفة البطاق وأعمال الرئ، جلبت القواعد الأساسية لاستاتيكا الأجسام الصلبة والسوائل منه الطريقة التي نعلمها الآن. وأولات كالت استخدام حتى يبقوا الامبراطورية الرومانية لم تستطع إلا قليلا زيدة عن ابتدائها استخدام الطاقة الجارية المستمدة من الماء والرياح والحرارة والشمس، وكانت استاتيكا أرشميدس كتابة انصدم الآلات البدائية مثل المخنيق

أو المضخة. أما إدخال المنفجرات والساعات التي تدار بالانفجار أو بالزئبق فيما بعد فقد وضعت أساس العصر الحديث الذي استخدم الطاقة المستمدة من منابع أخرى غير طاقة السكانبات البشرية أو دواب الجمل. ومع أن المختربين المعنولين بين الصيبيين والاسكندريين مثل هيرون الذي عمل نموذجاً لتربين بخاري، عرفوا إمكان إنشاء آلات تدار بعير واسطة النشاط العضلي للسكانبات الجية، إلا أن أساس طاقة في المدينة القديمة ارتسكز في أساسه على إقامة الدارق حيث يخفف كثيراً أو قليلا باستخدام دواب الجمل. وفي بداية القرن السادس عشر وقفت الحضارة على اعتاب تقدم أي ليحجب كل عمل يبنائي من فجر الحضارة البلية إلى الطوافي مجرداً حول الكرة الأرضية، وفي نفس الحقبة التي بدأ فيها نهج المشروعات التجارية المتنافسة في إظهار فضائع تجارة الرقيق، كشفت الاختراعية الإنسانية عن وسائل خلق مجتمع ينظم أوقات فراغه ويمبائل أمنه دون عبودية واسترقاق، ويمتيز ببلاد الديناميكا أو ميكانيكا الحركة الفاصل التفاف العظيم الذي يعيصل حضارة الرق في العصور القديمة عن الرجال والنساء الذين أصبحوا الآن تارخياً متقطعين من تصديق في تخطيط حياة بشرية على الأرض تتفق مع احتياجات الإنسان العادية.

وفي الوقت الذي كان يدرس فيه تبحر براهه وكثير قوانين حركة الكواكب في آخر القرن السادس عشر، كانت النشاطات آلات ذات أهمية مزايادة. والتجارب التي أرشدت إلى تحسين أجزاءها فسترت قوانين الحركة الأرضية، والمجلة، أو تجمع معبد السير، وهي شيء سهل فهمه في هذه الأيام حينما نسمع السيارات تعبر من رسوم وأجهاها فوق التل. هذه المجلة كانت تجريرة جديدة لم تقرض نفسها على خيال الرجال والنساء الذين تعودوا على الحركة البطيئة نسباً، وذات الحزات لغرباء يجرها الحصان أو الثور ضد احتكاك الطرق الخشبة. وجاليليو (١٥٦٤ - ١٦٤٢) الذي كشف قاعدة أن التدديبات المتتالية للبدول تستغرق نفس المدة، وبين أيضاً أن الأجسام الماركة والنفيلة سبيلاً وبمختلفة الأجسام والكثافات تنقط نحو الأرض معاً وبسرعة واحدة إذا بدأت الحركة من نفس الموضع، وقد غير جاليليو علم الميكانيكا كلية حينما أدخل قاعدة أن فيه أشد التي يعاينها الجسم من طريق



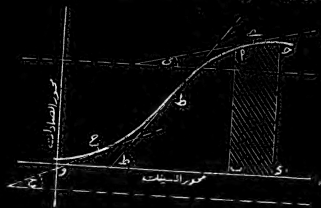
ثقله يمكن قياسها بواسطة مقدرته على زيادة السرعة التي يتحرك بها جسم آخر،  
وهيئات (١٦٣٩ - ١٦٩٥) الذي كان أول من هيا البدول للساعة، درس  
قوانين تصادم الأجسام المرنة، وقاعدة الحركة المركبة التي استخدمها لكي  
يجعل الساعات تميز الوقت الصحيح في خطوط العرض المختلفة (١).

وإذا وضعنا هاسق مع موضع المقارنة، فإننا نرى أن القرن الذي تلا الملاحظات  
المنظمة بشكل جيد تماماً بمشكلة الحركة، وكان العمل المنوّج الذي أتى في آخر  
القرن السابع عشر، قانون نيوتن للجذب العام، الذي ربط مسار الكواكب  
مع مسار قنابل المدافع مع قاعدة الحركة المركبة، وقد جعلت قاعدة جاليليو  
للبنائية الأرضية من الممكن أن نرى لماذا إذا قذفت قنبلة المدفع في اتجاه يميل  
على الأفق براوية فإنها تستمر في اتجاه منح بسرعة أفقية ثابتة تقريباً، نتيجة  
للفعل المركب من قوة الانفجار الابتدائي وقوة الشد التي تجعل الأجسام  
الساقطة نحو الأرض تتسارع بسرعة. وإمكانية أن كل الأجسام المادية تعاني  
شديداً على بعضها البعض يتناسب مع كتلتها مثل قوة شد ثقل مربوط في طرف  
خيط حينما نحركه حول دائرة، هذه الإمكانية اقترحت نفسها للكثير من معاصري  
نيوتن كغير القوانين ككل، وقد كان نيوتن قدراً على أن يبين أن المسار  
المحلي لجسم يتحرك يعدل سير فائت يكون قطعاً ناقصاً إذا كانت قوة الشد  
تحو بؤرة القطع الناقص مقبسية بمقدورها على إحداث الحركة تناسب عكساً مع  
مربع بعد الجسم عن إحدى البؤرتين، وقد ربطت هذه النظرة جانباً الحركة  
الأرضية بحركة الكواكب في مسارات، على شكل قطوع ناقصة مع أجسامها  
وأبعادها عن الشئ من باعتبارها بؤرة.

وحين بدأ الرياضيون في الاهتمام بمسائل الحركة، وجدوا أنفسهم مقدرون  
باعتبار الجبر العربي، الذي اشتق قواعده من الهندسة الإقليدية، واضطروا  
لإبتداع آلة حساب جديدة مبنية على هندسة عبد الإصلاح، وبسعى هيندا  
الجبر الجبرون عادة حساب النكبات، لاهائية الصغير، ولو أنه ابتدع في البداية  
ليبحث في هندسة الحركة، إلا أنه يمكن تطبيقه في أنواع أخرى من الحساب

(١) عتبه أمير قري وديري، حيث يختلف خطوط العرض، وتبعاً لذلك فكل تطبيق البدول تماماً  
يختلف باختلاف خط العرض أو بعد القليل.

مثل إنشاء جدول اللوغاريتمات أو إيجاد قيمة اللقدار ط، وهو من وجهة النظر  
الهندسية يتم أساساً بحساب (ش ١٦٦)، وأجد الفرق بين ويسمى حساب التفاضل  
هو وسيلة لإيجاد مقدار ميل منح عند أية نقطة، وعلى ذلك فالمنحنى الميّن  
في الشكل يندرج بميل تدريجي جداً، يتم يصحح شديد الميل، وفي النهاية يستوي  
حتى لا يتكاد يكون هناك ميل للمرة، وما يسمى معامل تفاضلياً ما هو إلا  
مجرد صيغة لإيجاد مقدار ميل منح عند نقطة معينة إذا عرفنا إحداثي هذه  
النقطة. والمخرج الآخر، ويسمى حساب التكال، يتم أساساً بإيجاد المساحة  
المحصورة بين جزء من المنحى (أ ب ج د هـ في الشكل) والنقطتين المناطرتين على محور  
العموديات (ب د)، ويستعملان بسمان والزائرين، بواسطة محور الصادات  
(أ ب ج د هـ)، وما يسمى تكاملاً هو ببساطة صيغة لإيجاد مثل هذه المساحة  
إذا عرفنا الإحداثيين السينيين (ب د هـ) والقطبتين (أ ب ج د هـ)، ويستعمل  
كل من جانبي التفاضل والتكامل طرقاً متشابهة، لأن المساحة المحصورة بين  
رأيتين لمنحى تتوقف على مقدار ميل جزء المنحى الذي عند هذه المساحة.



ش ١٦٦

يبدأ المنحى بـ 'ج' يمكن معرفة أين الابتداء أيضاً عن طريق، ثم يفتتح الميل في الوسيط عند 'ط' حيث  
تزيد من، ثم يصحح في النهاية أن يزداد عند 'ب'، وبين الميل عند 'أ' فقط بمقدار الزاوية  
التي يصنعها المنحى عند هذه النقطة مع محور السينات (أ ب ج د هـ)، أو مع أي مستقيم يوازيه.

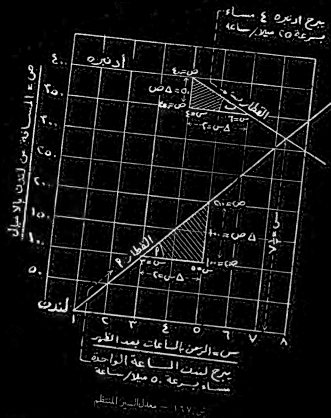
وما أن هذا الحساب لإبتدع للبحث في مسائل الحركة، فليس من السهل أن

تري أهميته دون أن نسأل أولاً كيف دخل قياس الميل والمساحة في دراسة الجزيئات . وعلى ذلك يجب أن تصرف مجهوداً قليلاً فنحاول أن نرى كيف مثلت سرعة السببية في الملاحظات الكبرى على خريطة الهندسة قبل أن نرى كيف نستعمل هذا الحساب في أمور أخرى .

التخيل البشري للمعدل البسر والعجلة : — إذا ما استخدمنا الجبر القديم لوصف الأشياء المتحركة ، لا نجد أمامنا أية صعوبة ما دامت هذه الأشياء تتحرك في خط مستقيم بمعدل سير منتظم ، ونحدد المسائل التي من هذا النوع في الكتب فقط ، ولكننا لا نجد في الحياة الحقيقية ، وعليه في الحقيقة أن ننظر نظرة فاحصة في مسائل الكتب لنرى كيف يمكن مع التجاوز البالغ أن يمتثل هذه المسائل الحوادث الحقيقية ، ومساءلة من هذا القبيل أخذت من أحد الكتب وأعطيت لتوضيح معادلة بسيطة في الباب السابع ، فقد قيل لنا أن قطاراً ( ١ ) يسير بمعدل سير ٥٠ ميلاً في الساعة يارح لندن في الساعة الواحدة إلى أدنبره في رحلة تبلغ أربعاً وعشرين ميلاً ، وقطاراً آخر ( ب ) يسير بمعدل سير ٣٥ ميلاً في الساعة يارح أدنبره في الساعة الرابعة على نفس الطريق ، فلو أخذنا المسألة بقيمتها الإسمية فإنه يمكننا أن نضع على محور الصادات كما في ش ١٦٧ المسافة من لندن بالأميال . وأن نضع على محور السينات الزمن بالساعات بعد الظاهر في اليوم الذي يحدث به هذا الحادث غير المحتمل الواقع ، ويمكن تمثيل تقدم

القطارين بمسقيمين يتقاطعان حيث  $س = ٧$  ،  $س = ٢٠$  بعد الظهر ، وهي النتيجة التي حصلنا عليها بعمل المعادلة ، وإذا نظرنا الآن إلى الشكل التالي فسرى لماذا لا يمكن أن نتحدث هذه المسألة إلا في كتاب فقط ، ولا تظهر في صندوق الإشارات .

أعد فحص الرسم البياني الأصلي أولاً ، وإذا أخذنا تقطيعاً على المستقيم الذي يمثل تقدم القطار ١ فإن معدل سيره كما هو معطى في المسألة يتأخر الميل الذي يعمله المستقيم مع محور السينات أو مع أي مستقيم يوازي هذا المحور . ومعدل السير هو خارج قسمة المسافة المقطوعة على الزمن الذي قطعت فيه هذه المسافة ، الزمن آخر المسافة المقطوعة في وحدة الزمن ، وهذا هو الفرق في  $س$

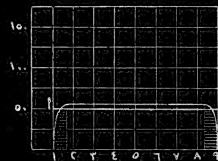
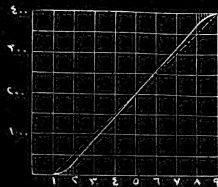


أو كما يكتبه الآن  $\Delta س = ٣٥$  وفي الزمن الذي يمر بين الساعة الثالثة (س=٣) والساعة الخامسة (س=٥) يتحرك القطار ٢ من بعد ١٠٠ ميل (س=١) عن لندن إلى بعد ٢٠٠ ميل (س=٣) ، وعلى ذلك فالميل  $\Delta س = ١٠٠ - ٢٠٠ = ١٠٠$  ، وكما هو سر يوم في الشكل نجد  $\Delta س = ٣ - ٥ = ٢$  ، ومعدل السير  $\Delta س / \Delta س = ١٠٠ / ٢ = ٥٠$  ، وهو كقولنا أن القطار بدأ فجأة بأعلى معدل سير ، وبوقب عن الحركة فجأة .

والجزء الأوسط من الخط الذي يمثل تقدم القطار يمثل قليلاً عن الخط المنقط الذي يناظر مساره في ش ١٦٧.

وعلى ذلك فاستخدام المعادلة البسيطة يتوقف على فرضين : أولهما أن يتحرك بمعدل سير ثابت في أثناء الجزء الأعظم من رحلته ( أى أن المسير في جهاز قياس معدل السير يظل ثابتاً ) وثانيهما أن الرحلة طويلة بدرجة تجعل كلا من الزمن المأخوذ للوصول إلى أعلى معدل سير ، والزمن المأخوذ للوصول إلى السكون لا يؤثر في حساباتنا بأنه درجة محسوسة ، والزمن المفقود بالفعل في الوصول إلى أعلى معدل سير وفي الوصول إلى السكون يعني أن القطار إذا قطع مسافة الأربعمائة ميل في ثمانية ساعات بالضبط ، فانه يجب أن يسير بمعدل سير يزيد ٥٠ ميلاً في الساعة في جزء من الرحلة حتى ولو كانت هذه الزيادة طفيفة جداً ، وعلى ذلك فاختلاف في ش ١٦٧ لا يتقاطعان تماماً عند الساعة ٧ ٣٠ ، وعندما تكون الرحلة طويلة ، فإن الخطأ الناتج من الفرض الثاني يكون صغيراً جداً للدرجة لا تضاهيها .

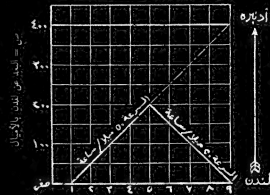
وفي الحياة الحقيقية تتحرك أشياء قليلة على خط مستقيم بمعدل سير ثابت ، وحتى إذا قامت بذلك لمساءة طويلة فالها عادة تتميز باتجاهها في أثناء ذلك ، وفي جبر الحركة الجديد تدخل في حسابنا الاتجاه كما تدخل معدل السير ، وكما في الحياة الحقيقية يكون للطريق المخرج للدراسة البخارية نفس الأهمية مثل ما يكون للمسافة التي تكون هذه الدراجة قادرة على قطعها في زمن معين ، وعلى ذلك فانا نميز بين معدل السير الفع ومعدل السير النافع الذي يسمى السرعة ، ومعدل السير الفع هو ببساطة خارج قسمة المسافة الكلية على الزمن الذي قطعت فيه هذه المسافة ، دون أن يكون للاتجاه دخل في ذلك ، والسرعة التي قطعت في اتجاه معين ، ولو أبحر القطار الأول في رحلته إلى جى بمعدل السير في اتجاه معين ، فإن سرعته في الاتجاه من الجى إلى أديره تساوي أديره في خط مستقيم فإن سرعته في الاتجاه من الجى إلى أديره تساوي



ش ١٦٨ - معدل سير راجع

والجزء الأعلى من ش ١٦٨ بين معدل سير القطار من وقت قيامه في الساعة الواحدة لغاية وقت وصوله في الساعة التاسعة ، ولو أمكننا أن نبدأ بجأه بأعلى معدل سير ، وأن نقف عن الحركة فجاء ، فإنه يمكن تمثيل معدل السير بالخط المستقيم اب الذي يوازي محور السينات ، ولا توجد قطارات حقيقية تقوم بذلك ، حتى ولو أمكن للقطار أن تحتفظ بمعدل سير ثابت إطلافاً في أثناء الجزء الأعظم من رحلته ، فإنه يجب أن تمثل معدل سيره في أثناء الرحلة كلها بمنحنى قته ذات أسنواء ، وذلك لتقرر حقيقة أن القطار يتكسب معدل سير حينما يبتدىء (هجرة موجبة) ، ويفقد هذا المعدل بوقت (هجرة سالبة) ، ومن الجزء الأيسل من الشكل نرى ما يعني بأن القطار لا يقطع في كل من الساعتين الأولى والأخيرة ما يقطع في كل ساعة من المسافة التي توسط بينهما . وعلى ذلك

معدل سيره وكما في ش ١٦٩ لو عكس القطار اتجاهه بعد سيره ٢٠٠ ميل وعاد إلى لندن في خط مستقيم بنفس معدل السير ، فان سرعته المتوسطة في كل الرحلة تكون صفراً عوضاً عن أن تكون ٥٠ ميلاً في الساعة فيما لو استمر مقطار في طريقه إلى أدبره .



س = الزمن بالساعات بعد الظهر

شكل (١٦٩)

معدل السير الفتح والسرعة

وإذا رجعت إلى شكل ١٦٧ ونظرت إلى تقدم القطار ب ، فانك ترى أنه في زمن قدومه ساعتان من الساعة الرابعة (س = ٤) والساعة السادسة (س = ٦) تغيرت المسافة التي قطعها القطار من لندن من ص = ٤٠٠ إلى

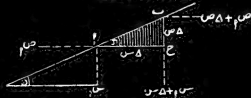
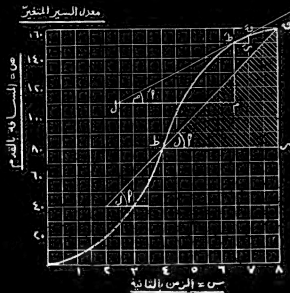
$$ص = ٣٥٠ ، وعلى ذلك لو كتبنا كما سبق  $\frac{\Delta}{\Delta س} = \frac{ص - ص}{س - س}$$$

$$\text{فإن } \frac{\Delta}{\Delta س} = \frac{٥٠}{٢} = \frac{٤٠٠ - ٣٥٠}{٤ - ٦} ، وعلى ذلك الارتفاع$$

في الرسم البياني للساعة (مقاسة على خط مستقيم) بالنسبة الزمن لا تمثل معدل السير الفتح ، وإنما تعطي معدل السير في اتجاه معين أي السرعة . والارتفاع : يتحرك

بسرعة + ٥٠ ميلاً في الساعة أي بمعدل سير قدره ٥٠ ميلاً في الساعة بعيداً عن لندن عندما تكون المسافة مقاسة من لندن ، والقطار يتحرك بسرعة - ٢٥ ميلاً في الساعة أي بمعدل سير مقداره ٢٥ ميلاً في الساعة حيث قيست المسافة نحو لندن .

والشكل الآتي (ش ١٧٠) يمثل شيئاً ما أكثر شبيهاً بالحركة التي نراها في الدنيا الحقيقية (دنيا الواقع) وبين المعنى المسافة التي تقطعها دراجة بخارية في تجربة قصيرة قيس زمنها بساعة إيقاف على طريق مستقيم طوله ١٦٠ قدماً ، وبقى الاتجاه ثابتاً ، وعلى ذلك معدل السير والسرعة متساويان ، وقد استغرقت



شكل (١٧٠)

س = الزمن بالساعة المقاس من لندن

كل التجربة ثمان ثوان من وقت الابل—س (س = ٠) إلى وقت الوقوف

$$(س = ٨) \text{ وعلى ذلك فالسرعة المتوسطة في كل الطريق } = \frac{١٦٠ - ٠}{٨ - ٠}$$

٣٠ = قدما في الثانية ، ولو درست الرسم فسترى أن الدراجة بطيئة ، ثم زاد معدل سيرها تدريجيا حتى جوال منتصف الطريق الذي سارت فيه ، حيث بدأ معدل السير في الجيوب ، وعلى ذلك في تقطع جوال ٨ أقدام في الثانية الأولى وفي بداية الثانية الرابعة كانت على بعد ٤٠ قدما من النقطة التي بدأت منها ، وفي نهاية الثانية الرابعة وصلت إلى نقطة ط على بعد ٨٠ قدما من البدء ، وعلى ذلك فهي قطعت ٤٠ قدما في الثانية الرابعة ، ومرتعتها المتوسطة في أثناء الثانية الأولى عشر أقدام في الثانية ، وفي أثناء الثانية الرابعة ٤٠ قدما في الثانية وأبدأ من ط فصاعداً بدأت السرعة تنقص ، وفي بداية الثانية الثامنة تكون قد قطعت ١٥٥ قدما ، وفي نهاية الثانية الثامنة تصل إلى هدفها الذي بعد ١٦٠ قدما عن نقطة البدء ، وعلى ذلك فالسرعة المتوسطة في الثانية الأخيرة ٥ أقدام في الثانية فقط ويمكن أن نعمل جدولا لتقدمه ، مستخدمين ٨ س للفترة بين مرحلتين متتاليتين مقبلة بالثانية ،  $\Delta$  ص للمسافة المقطوعة في الفترة المناظرة  $\Delta$  س كما يلي :

$$\begin{array}{ccccccc} \Delta \text{ ص} & & & & & & \\ \Delta \text{ س} & \Delta \text{ ص} & \Delta \text{ س} & \Delta \text{ ص} & \Delta \text{ س} & \Delta \text{ ص} & \Delta \text{ س} \end{array}$$

١٠	٢٠	٢٠	٢	٢
٣٠	٦٠	٨٠	٢	٤
٣٢ر٥	٦٥	١٤٥	٢	٦
١٢ر٥	٢٥	١٦٠	٢	٨

البحررض الآن أننا لاحظنا طريق راكب دراجة بدأ سيره وهو على مسافة تسبق بدء طريق التجربة ، وانتهى من سيره بعد مسافة من نهاية هذا الطريق المرسوم وما كان عليه أن يزيد من سرعته أو يقل منها ، وإنما عليه أن يكون قادراً على أن يجعل مؤشر القراءة في جهاز قياس معدل السير عالياً في نفس

الموضع طول الطريق ، فيكون الرسم البياني الذي يسجل سيره خطاً مستقيماً ، وبحرول التواني إلى ساعات والأقدام إلى أميال ، نجد أن ميل المستقيم يكافئ قراءة جهاز قياس معدل السير ، والسرعة المتوسطة بين نقطتين ط ب في الرسم البياني س ١٧٠ هي أيضاً ميل المستقيم الذي يصل بينهما ، ط س هو الفترة الزمنية  $\Delta$  س ب هو المسافة  $\Delta$  ص المقطوعة ، والميل

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{ط ب}}{\text{ط س}} = \text{م. ط س.}$$

ولذا قربت نقطتان من الطريق قرباً كافياً مثل الاحداثيين الصاديين للنقطتين ط ب م. فان الخط الممتد الذي يصل بينهما يصعب تمييزه عن خط مستقيم ، ولا يتقل مؤشر جهاز قياس معدل السير بدرجة محسوسة في أثناء الفترة التي يمثلها الفرق بين الاحداثيين السبيين للنقطتين م ب ط ، وعند ما تقرب ط م من م قرباً كافياً لدرجة أنه لا يمكننا أن نميز بينهما ، فالمستقيم الذي يصل بينهما يصبح مماساً عند النقطة ط م ، ويقابل ميل هذا المستقيم قراءة جهاز قياس معدل السير عند اللحظة التي يمثلها الإحداثي السبئي للنقطة ط ، أو عند المسافة من البدء التي يمثلها الإحداثي الصادي للنقطة ط ، ومهما جعلنا المثلث ط م ب صغيراً أو بمعنى آخر مهما قرب ط م ب ، فإن الزاوية التي بين ط م ب ب م تظل آتية معينة تماماً ، وتكون هي الزاوية التي يصنعها المماس مع محور السينات ، أو مع أى مستقيم يوازيه .

وفي الرسم البياني لمعدل السير كالرسم المتقدم ذكره حيث قيست المسافات على محور العمادات والأزمنة على محور السينات ، يمكننا دائماً تعيين قراءة جهاز معدل السير عند أية نقطة ط ، احداثيها السبئي س ط ، واحداثيها الصادي ص ط ، أي عند ما يكون الجسم المتحرك قد قطع مسافة قدرها ص ط في زمن قدره س ط . وكل ما نعمله أن نرسم مماساً للبحني عند ط ب ونقرأ الزاوية التي يصنعها المماس مع أى مستقيم يوازي محور السينات ، ثم نثبت من ظل هذه الزاوية من الجدول . ويمكننا أن نرى من المئات الكبير أن الميل

ظا ١ =  $\frac{ط}{ل}$  ولما كان ط م يقابل أقسام على محور الصادات أى . وقدماً

ل م من س = ٢٤ إلى س = ٦٥ يقابل تقريباً ٤١ من الأقسام على محور السينات ، فالسرعة عند ط = تقريباً  $\frac{٤٠}{٤١} = ٩٨$  .

ولو رسم المماس بدرجة كبيرة من الدقة ، فإن النتيجة تقرب كثيراً من قراءة جهاز قياس معدل السير ، ويمكننا أن نحصل على قياس تقريبي وسريع للسرعة عند ط ( أى بعد ٦ من الثواني أو بعد ١٥٠ قدماً من بدء الرحلة ) بأخذ السرعة المتوسطة بين نقطتين قويتين من ط ، مثل السرعة المتوسطة بين النقطتين على الطريق بعد ٦ و ٧ من الثواني من بدء الرحلة . وهنا جدول لمعدل السير لتقريبى حصل عليه بالطريقة سالفة الذكر .

س	س	ص	Δ ص	معدل السير التقريبى
س	Δ س	ص	Δ ص	عند س =
٠	١	٠	٨	٠,٥
١	١	٨	١٢	١,٥
٢	١	٢٠	٢٢	٢,٥
٣	١	٤٢	٢٨	٣,٥
٤	١	٨٠	٤٣	٤,٥
٥	١	١٢٣	٢٢	٥,٥
٦	١	١٤٥	١٠	٦,٥
٧	١	١٥٥	٥	٧,٥
٨		١٦٠		

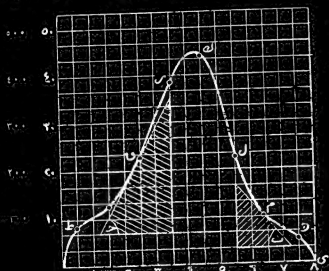
ونرى من هذا الجدول أننا لو أخذنا السرعة المتوسطة بين ابتداء الثانية السابعة وانتهائها كما ظهرت في جهاز قياس معدل السير ( بالقدم في الثانية ) حينما بنيت ساعة الإيقاف ٦٥ من الثواني كانت النتيجة ١٠٠ أقدام في الثانية ، وهى قريب من النتيجة السابقة بمعدل ٢٪ . وذلك لأن المماس رسم تقريبي من

ناحية ، ومن ناحية أخرى لأن معدل السير لا يتغير بانتظام من نهاية الثانية السادسة إلى نهاية الثانية السابعة . وطريقة المماس تكافئ أخذ نقطتين إحداً منهما السينين س ط + ٦ من س ط + Δ ٦ إحداً منهما الصادان ص ط + ٦ ص ط + Δ ٦ ص ، ويقربان من بعضهما بحيث يكون كل من Δ ٦ من س ط صغيراً جداً حتى لا يمكن أن يقاس ، ويكون الميل ( الجزء الأسفل من س ١٧٠ )

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{ظا ١} . \text{وعندما يكون كل من } \Delta \text{ ص } ٦ \text{ من } \Delta \text{ س صغيراً صغراً}$$

لا يحس ، فالتا نكتب النسبة السابقة  $\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}}$  ( وتنطق دال صاد على دال سين )

وتسمى هذه النسبة المعامل الفاضلى للتغير ص بالنسبة للتغير س ، وهى تقابل السرعة أو المسافة في وحدة الزمن إذا كانت الكيات المقاسة على محور السينات تدل على الزمن ، والكيات المقاسة على محور الصادات تدل على المسافة



شكل ( ١ )

الرسم البياني للجدول س = الزمن بالثواني  
ص = قراءات جهاز معدل السير بالقدم في الثانية

في خط مستقيم ، ومع ذلك فهي تقابل أى معدل للتغير ، مثل انفتاح إطار من المطاط عن كل مشوار للبطخة ، وإذا أخذنا طول قضيب من الحديد على محور الصادات ودرجة الحرارة على محور البنات ، فالرسم البياني الناتج يمثل تمدد القضيب أو زيادة طوله بالنسبة لدرجة الحرارة حينما يزيد درجة الحرارة أو تنقص . وإذا أخذنا طول الزنبرك على محور الصادات ، والتقل المعلق في طرفه على محور البنات كما في ش ١٧١ ، فالرسم البياني الناتج يمثل استطالة الزنبرك أو زيادته أو له بالنسبة لوحدة الأتقال حينما يزيد التقل المعلق به أو ينقص . ولإننا الآن في مركز لنا بقباس العجلة أو المعدل الذي به تزيد سرعة جسم متحرك أو تنقص ، وفي التوضيح الآتي (ش ١٧٢) أوجدت لوحدة على محور البنات لنصف ثانية كما في الشكل السابق ، وأخذت الأقسام على محور الصادات لقراءات جهاز قياس معدل السير في اللحظات المسالية ، وقد بنيت على القراءات التقريبية لجهاز قياس معدل السير الواردة في الجدول السابق . ولتمييز الجهاز على محور الصادات في هذا الرسم عنه في الرسم السابق نسبه محور العينات حيث ع تنال على السرعة .

والمنحنى المبين منجد من ط إلى ب ، ومن ب إلى م ، حيث تظل السرعة متزايدة ، ويظل مؤشر جهاز قياس معدل السير متحركة نحو اليمين ، ويكون للدراجة عجلة ، وعند نقطة ك يستوى المنحنى للحظا ، وبعدئذ تنافس السرعة ويكون للدراجة تقصير ، ولكون التقصير ضد العجلة في الكلام العادي فيسمى العجلة السالبة في الديناميكا وعند نقطة ل حيث يقف مؤشر جهاز قياس معدل السير عن الحركة نحو اليمين تكون العجلة صفرا ، وعلى ذلك قبل المنحنى ، الذي تقوم فيه السرعة مقام المسافة على محور الصادات ، يقاس معدل تغير

السرعة . وتكون العجلة  $\frac{v}{s} = \frac{v}{s} \times \frac{1}{s} = \frac{v}{s^2}$  حيث ع =  $\frac{v}{s}$  وتكتب العجلة عادة  $\frac{v}{s^2}$  وتطابق دال اثنين صاد على دال سين ترع .

وهذا أنه يمكننا أن يمثل على محور الصادات معاملات تفاضلية أخرى مثل التدرج في كل وحدة من الوزن ، فاننا نستخدم عادة الإصدايح الأكثر

تعبها . المعامل التفاضلي الثاني ، حيث يذكر ك أن العدد ٢ في هذا المقام لا يلبس نفس الشيء الذي يلبس التربع ، ولو أنه كتب بنفس الطريقة . ويستري

عند ب حيث يتزايد معدل السير أن  $\frac{v}{s} =$  ظاهر يتناقص عند م حيث

يتناقص ، معدل السير يكون  $\frac{v}{s} =$  ظاهر

التفاضل : وكل ما وصلنا إليه أننا يمكننا كيف نتوصل على المعامل التفاضلي بواسطة تمهنة هندسية . ودقة النتيجة في هذه الطريقة تتوقف على الرسم وحن مع أحسن الرسم نجد عدم دقة كبيرة لأمير منها ، وذلك عندما يكون للبياني منجداً . ويظهر أن أول شخص تحقق من أنه لا حاجة للاعتماد على الرسم هو البياني بارو أستاذ نيوتن . ويمكننا توضيح الطريقة التي أدخلها بمسار قبله مدفع كما هو مبين في شكل ١٧٢ ع . وفي شكل ١٧٢ تقاس السرعة المتوسطة للقبلة وهي متحركة إلى أعلى بين النقطتين ط ب ب بظل الزاوية ، بعد التوضيح بوحدة القياس المناسبة ، وإذا كانت وحدة الزمن (س) ثانية واحدة والمسافة



شكل (١٧٢) سرعة قبلة مدفع

(ص) ٦٤ قدما فمعادلة المنحنى كما هو مرسوم هي  $\frac{v}{s} = \frac{3}{2} - \frac{v^2}{4}$

ولأرئدنا كما في ش ١٧٢ أن نجد السرعة إلى أعلى عند أية نقطة ط واحدتها  $\frac{v}{s}$  (بعد ذلك نأخذ  $\frac{v}{s}$  في اللحظة التي أطلق فيها المدفع فاننا نعلم من صيغة الطريقة وبالعودة إلى ش ١٧٢ نرى أن :

$$\frac{ص - ص}{ط - ط} = \frac{ص - ص}{ص - ص} = 1$$

فلو مثلنا الفترة بين  $ص$  و  $ط$  بالقيمة  $\Delta$  من (أى  $ص$  إلى  $ص + \Delta$ )

فيكون أن نكتب  $ص + \Delta - ص = \Delta$

$$ص + \Delta - ص = \Delta$$

$$ص + \Delta - ص = \Delta$$

$$\frac{ص + \Delta - ص}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

$$(ص + \Delta - ص) = \Delta$$

$$\frac{ص + \Delta - ص}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$



شكل (١٧٣)

$$\frac{ص + \Delta - ص}{\Delta} = \frac{\Delta}{\Delta} = 1$$

$$\frac{ص - ص}{ط - ط} = \frac{ص - ص}{ص - ص} = 1$$

وجنبا لتلصق  $ط$  به حتى لا يمكن تمييز أحدهما عن الآخرى (ش ١٧٣) تكون  $\Delta$  من صغيرة جداً حتى لا يمكن أن تقاس، وعلى ذلك فيكون

$$\frac{ص - ص}{ط - ط} = \frac{ص - ص}{ص - ص} = 1$$

وإذا نظرت إلى ش ١٧٣ فسترى أن  $ص$  الاحداثى السينى لنقطة  $ط$  يساوى  $ط$  في هذه الحالة وعلى ذلك فمعد  $ط$  يكون

$$\frac{ص - ص}{ط - ط} = \frac{ص - ص}{ص - ص} = 1$$

ولو قسمنا الزاوية  $١$  بمثلثة فاننا نجد  $٢٠^\circ$  لا قرب نصف درجة، ونجد من جداول الظلال أن  $ظا ٢٠^\circ = ٠.٣٧٤$ ، وكل وحدة على محور السينات ثابته واحدة، وعلى ذلك فهذا يقاس السرعة فى الثانية بمقاييس الطول المخصوصة التى اختارناها المتغير  $ص$ ، وفى الشكل الوحدة على  $ص$   $٦٤$  قدما، وعلى ذلك فتكون  $ح = ٦٥ \times ٠.٣٧٤ = ٢٤$  قدما فى الثانية، وهذا يساعدنا فى أن نرى قاعدة أكثر تعمماً للتفاضل، أى إيجاد الظلال، إذا ما وضعنا  $ص$  ومعاملها التفاضل فى طريقة مشابهة، وعلى ذلك

$$ص - ص = ط - ط$$

$$\frac{ص - ص}{ط - ط} = \frac{ص - ص}{ص - ص} = 1$$

ويمكن ترك الرمز  $ط$ ، لأنه ما وضع إلا للتمييز من  $ص$ ، جنباً كانت

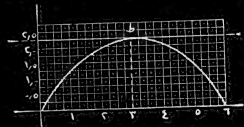
$ط$  به يبدئين، وبما أن  $ص = ١$  مبنا كانت قيمة  $ص$ ، فانه يمكننا أن نكتب المعادلة هكذا



$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2} = \frac{1(2\text{س})}{4}$$

وقل أن نعرض القاعدة المقترحة من التشابه بين  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  حينما تكتب

بهذه الطريقة . فانه يمكننا أن نبيه إلى نتيجتين عمليتين من العبارة التي حصلنا عليها ، أولاً بما أنه يمكننا أن نستخدمها في إيجاد اللحظة المضبوطة التي عندها



شكل (١٧٩)

تصل قبلة المدفع إلى أقصى ارتفاع في مسارها ويكون هذا عند ما تنقف حركتها إلى أعلى ، وقبل أن تبدأ في الهبوط إلى أسفل . وعند هذه النقطة يمكننا أن نقول إنها وقفت عن الحركة تماماً في وسط الهواء لمدة لحظة . وسرعاناً إلى أعلى التي تغيرت من الإيجاب إلى السلب تصبح صفراً ، ويكون المماس المماسي ( ش ١٧٤ ) موازياً لمحور السينات حيث تكون زاوية  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 0$  .

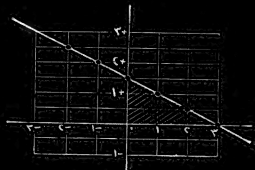
$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4}$$

أي أن قبلة المدفع تصل إلى أقصى ارتفاع بعد ٣ ثوانٍ من الانضجار ، ويمكن إيجاد ارتفاعها عند هذه اللحظة بوضع  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3$  في المعادلة الأصلية

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2} = \frac{1(2\text{س})}{4}$$

$$\text{ص} = \frac{3 \times 2}{2} = \frac{6 \times 1}{4} = 1.5 \text{ وحدة}$$

وبما أن وحدة القياس على محور الصادات ٦٤ ، فيكون الارتضاع مساوياً  $1.5 \times 64 = 96$  قدماً . ويمكننا أيضاً استخدام معادلة المماس في التفاضل لإيجاد عجلة قبلة المدفع إلى أسفل ، وفي ش ١٧٥ رسمنا الرسم التالي



شكل (١٧٥)

نحسب الآن من محور السينات الزمن بالثانية ، ونمثل الأقسام على محور الصادات بمعدل  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  إلى البنية أو الثانية مقسمة رأسياً إلى أعلى وكل وحدة على محور الصادات تمثل ٦٤ . وقمنا بكتابة دوائر استقيم إلى أعلى من الزمن إلى التنازل ، وعلى ذلك فيكون دائرة الجبل ثانية إلى القبلة بمعدل  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  إلى أعلى إلى تكتب بمعدل سير نحو الأرض والميل كما يرى من البنية المائلة

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2} = \frac{1(2\text{س})}{4} = \frac{3}{4}$$

للمعادلة  $\frac{\text{ص}}{\text{س}} = 3 - \frac{1}{4}$  وكما سبق تمثل الأقسام على محور الصادات قيم  $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$

$\frac{\text{ص}}{\text{س}}$  المظارة ، والرسم خط مستقيم ويمثل ميل المستقيم هو المعامل

التفاضل الثاني . وتبين لك من الإشارة المكتوبة تحت الرسم أن :

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{3}{2} = \frac{1(2\text{س})}{4}$$

٣٣ قدماً في الثانية لكل ثانية

أى أن قبلة المدفع في أثناء الرحلة كلها تفقد دائماً (إشارة سالبة) معدل سير إلى أعلى، وعلى ذلك فهي تكتسب معدل سير نحو الأرض بنفس المقدار وقد بين جاليليو أن جميع الأجسام الساقطة بالقرب من الأرض تكتسب معدل سير إلى أسفل بمعدل يساوى تقريباً ٣٢ قدماً في الثانية لكل ثانية لأن لم تكن هناك مادة تعيق سيرها، وتنفذ الرشوة وقطع العسلة في الفراغ بنفس المعدل، وميل الرشوة إلى الظهور ينسب إلى كبر المسطح الذى يتعرض للقوامة الاحتكاكية مع الهواء، وقد صمم شكل السيجار للقدائف الحديثة، إذا ما قورنت بقنال المدافع ذات الزى القديم، كما صممت خطوط التيارات في العربية الحديثة لتقليل السطح الذى يلاصق الهواء الذى تتحرك خلاله.

ويمكن استخدام حساب التفاضل في عدد كبير من الحسابات المتنوعة بجانب المسائل الميكانيكية التى اخترع من أجلها، ولتطبيقه بشكل صحيح في أنواع المسائل التى تتضمن ميكانيكا الحركة، يجب أن يكون من الأهمية بمكان أن تذكر أن العجلة لا تعنى فقط معدل زيادة السير أو تقليله كما يستخدم ذلك في لغات الكلام اليومية، في الميكانيكا تعنى العجلة التغير في السرعة، وتعنى السرعة دائماً معدل السير مقبلاً في اتجاه خاص على خط مستقيم، ولو تحرك متحرك في خط مستقيم، فسرعته هي معدل سيره بالإشارة المعينة التى تعين أى الاتجاهين ينتج في حركته، وإن لم يتحرك في خط مستقيم فإن معدل سيره بين نقطتين على مساره يجب أن يكون دائماً أكثر من سرعته، فمثلاً إذا تحرك قطار من أ إلى ب في ساعة، فإن سرعته في الاتجاه أ ب هي - ١ ب ميل في الساعة، وفي الاتجاه ب أ هي - ١ ب ميل في الساعة، ومعدل سيره هو ١ ب ميل في الساعة في أى الاتجاهين، ولو سار في طريق غير مباشر مثلاً في خط مستقيم من أ إلى ح، وفي خط مستقيم من ح إلى ب، فإن معدل سيره هو (أ ح + ح ب) ميل في الساعة (المسافة الكلية في الزمن)، ولكن سرعته في الاتجاه أ ب لا يزال أ ب ميل في الساعة، والسبب في هذا التغير هو الاختيار العالمى للقصور، وجداً يقف القطار فجأة، فإنا نبدل قوة شد لنفسنا من الاندفاع جانباً إلى الأمام، وحينئذ يدور حول ركن فجأة، فإنا ننحى إلى الداخل لنقع أنفسنا من الاندفاع إلى الخارج على ذراع قيادة الدراجة، ويجب أن نبدل قوة

شد لإيقاف متحرك من التحرك إلى الأمام في خط مستقيم، مثلاً تجعله يسرع أو يبطئ. في الاتجاه الذى يسير فيه، ولو قسنا القوة أو الشد بالحركة التى تحدثها في الأشياء، فإننا على ذلك نهم بالاتجاه الذى يتحرك فيه المتحرك، كما نهم بالمسافة التى يتحرك خلالها، فإن اتجاهه يتحرك بمعدل سير ثابت (أى المسافة في وحدة الزمن) على دائرة، فإن اتجاهه يتغير بتغير طول الوقت، ويمكن أن يتدفع في اتجاه المسار إذا لم تترط نحو المركز قوة شد كقوة الشد الثانية التى يعانها أصبعك حينما تورج حجاراً من بوطاً في طرف جبل. انقطع الحبل، تجد الحجر يتدفع في اتجاه المستقيم الذى يمس المسار الدائرى عند النقطة التى كان عندها الجسم عندما قطع الحبل. وفي كل هذه الأنحاء التى يكون فيها أصبعك، فإنك تنحى إلى الداخل معطياً له حركة نحو المركز، وهذا ما نسميه في الميكانيكا بقولنا أن للجسم حركة نحو المركز، ومع أنه لا توجد زيادة في السرعة أو قوة بالمعنى العادى، فإن هناك تغيراً متصلاً في السرعة. ولأنه خارج عن مجالنا أن ندخل في تفصيلات حول قياس الطرقة التى بها تتغير سرعة متحرك إذا تحرك على مسار منحني، وإذا رغبت الدخول في هذه المسألة نعلم أكثر فيما بعد، فيجب أن تكون حذراً جداً من حقيقة أن المعامل التفاضلى يستخدم فقط للسرعة في الميكانيكا، والسرعة فقط تناظر عددياً القراءات على جهاز قياس معدل السير إذا كان الطريق مستقيماً.

ويستخدم في هذا الباب بالأخص حساب التفاضل لإثبات الصغر الحبل مسائل عديدة لا تتوقف إلى فهم الميكانيكا. ولا يمكنك فهم أعمق التطبيقات خارج الميكانيكا إلا إذا داومت على دراسة قواعد إيجاد ميل أنواع مختلفة من المنحنيات، وقبل الغوص في المياه العميقة سنعرض توضيحاً بسيطاً لاستخدامه في حل فعل من المسائل لا يطبق فيها الجبر العادى، وسيساعدك هذا التوضيح على مواجهة العمل القويروى الصعب. وما إيجاد ارتفاع قنلة المدفع حينما تكون أبعد ما يمكن من الأرض إلا مثال لإيجاد أقدمية العظمى التى تأخذها بعض القياسات، حينما تعرف عبارة عامة تتضمن جميع القياسات الممكنة، والمائل الذى من هذا النوع لا يصغر في الحركة. فمثلاً يمكن أن تسأل عن رجل يتجول بنصف لأكبر عدد من الدجاج باستخدام الفلحة من شاك إلى ذلك، طرولاً

٢٠٠ ياردة ، وتكون مسألتك أن تعمل شكلا مستطيلا مساحته أكبر مما يمكن (سطح الأرض اللازم للدجاج) إذا كان الطول الكلي لأضلاع الأربعة ثابتا .

وإذا كان مجموع أطوال أضلاعه الأربعة ٢٠٠ ياردة فإن مجموع طول ضلعين متجاورين ١٠٠ ياردة ، وعلى ذلك إذا كان طول أحد الضلعين من ياردة ، فيكون طول الضلع الآخر ( ١٠٠ - س ) ياردة ، وإذا عرفت من فالك تعرف الشكل ذي المساحة العظمى ، وتكون قيمة س هي ( ١٠٠ - س ) أي ١٠٠ - س = س ، وتكون مسألتك أن توجد قيمة س التي تجعل س نهاية عظمى . ولأحدى طرفي الخلل أن ترسم القطع المكافئ س = ١٥٠ - س ثم تقس الإحداثي السيني الذي يتناظر أعلى نقطة من المصح ، والطريقة الأخرى أن توفر على نفسك ترسم خطيقي قاعدة أن س يجب أن تبلغ

قيمتها العظمى حينما يكون  $\frac{S}{S} = 0$  وكذا في مثال قبلة المدفع

$$\Delta \text{ ص } 100 = (\text{س} + \Delta \text{ س}) - (\text{س} + \Delta \text{ س}) - 100 - \text{س} + \text{س}$$

$$100 = \Delta \text{ س} - 2 \text{ س} - \Delta \text{ س} - \text{س}$$

$$\frac{\Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}} = 100 - 2 \text{ س} - \Delta \text{ س}$$

وحينما يكون  $\Delta \text{ س}$  صغيرا جداً بدرجة لا تؤثر ، فإن هذا المقدار  $100 - 2 \text{ س} =$

وحينما يكون  $100 - 2 \text{ س} = 0$  يكون  $\text{س} = 50$

وعلى ذلك فالمساحة تكون أكبر مما يمكن حينما يكون طول أحد الضلعين ٥٠ ياردة ويكون طول الضلع الآخر ١٠٠ - ٥٠ أي ٥٠ ياردة ، ويكون الشكل مربعا ، ويمكنك تحقيق النتيجة بجدول ، وإذا كان الضلعان متساويين فتكون المساحة ٥٠٠ ياردة مربعة ، وإذا كان أحد الضلعين أطول من الآخر بمقدار ٢٠ ياردة فتكون المساحة  $40 \times 60 = 2400$  ياردة مربعة ، وإذا كان أحد الضلعين أطول من الآخر بمقدار ٢٠ ياردة فتكون المساحة  $2100 = 30 \times 70$  ياردة مربعة ، وإذا كان أحد الضلعين أطول من الآخر

بمقدار ٩٩ ياردة فتكون المساحة  $99 \times 5 = 495$  ياردة مربعة . طرق التفاضل : قد فهمت الآن الفائدة الأساسية لحساب التفاضل ، وهو

يتلخص في حقيقة أن ميل المماس للمصح يقس معدل التغير في السكية التي تمثل بالقياس على محور الصادات في وحدة التغير في السكية التي تمثل بالقياس على محور السينات ، ويكون س أكبر مما يمكن أو أصغر مما يمكن حينما يكون يكون الميل صفرا . وقد تصادف أن اعتماد المثل السابق على نفس طراز المصح (القطع المكافئ) كقبلة المدفع ، ولحل أية مسألة خاصة بإيجاد النهاية العظمى أو النهاية الصغرى لبعض القياسات التي تصح في حدود معينة ، ما عليك إلا أن تعرف كيف توجد ميل المماس للمصح من أي شكل .

ولايجاد المماس إلى منح طليت معادله ، أو كما سنقول الآن التفاضل من بالنسبة إلى س ، فإنه يتوقف على فهم التاريخ الطبعي للمنحنيات ، ويمكن تصنف المنحنيات إلى فصائل وأجناس وأنواع كفضائل وأجناس وأنواع الحشرات والحيوانات النندية ، وأكثر الأنواع بدائية الخط المستقيم ص = م + ح

وكما رأينا فلا يكون المعامل التفاضل م ( = ظا ) وهو لا يتغير لكل قيمة من قيم س لأنه لا يحتوي على س ، وهو في اللغة الرياضية كمية ثابتة ليكون حداً لقيمة متغيرة ، وعلى ذلك يمكن أن تكتب

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \text{م} \text{ حينما يكون ص } = \text{م} + \text{ح}$$

والمنحنى الذي تمثل ص = م س ما هو إلا نوع بسيط آخر من المنحنيات التي مرت بنا ، وتطبق طريقة مثل بارو ، فانا نحصل على

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{م} \text{ س} - \text{م} \text{ س}}{\Delta \text{ س}}$$

$$= \frac{(\text{س} + \Delta \text{ س}) - \text{س}}{\Delta \text{ س}}$$

$$= \frac{\Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}}$$



المعامل المتفاضل الثاني للتغير  $\frac{1}{\omega}$  حينما يكون  $\omega = \text{م أي أن}$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\text{ص}}{\omega \text{ من}}$$

هنالك نتيجة

ونرى أن القطار والجرور وهي من جنس السور، والكلايت وأبناء آوى  
وهي من جنس الكلب، ما هي جميعها إلا أمثلة من العشرة الكبرى آكلة  
اللحم، فكذاك جميع المنجيات التي مرّت علينا ما هي إلا أمثلة من الشعب  
الأكبر  $\text{ص} = 1 + \text{ب} + \text{س} + \text{ح} + \text{س}^2 + \text{و} + \text{س}^3 + \dots$

ولإيجاد المماس لأي منحن يمثل معادلة من هذا النوع إذا ما أعطيت قيم  
متناهية للتوابيت  $\text{ب}، \text{ح}، \text{و}، \dots$  فما علينا إلا أن نتفاضل كل حد  
على حدة، وكما سبق بوضع  $\text{س} = \text{س} + \Delta$  يكون  $\text{ص}$

$$= 1 + \text{ب} + \text{س} + \Delta + \text{س}^2 + \Delta \text{س} + \text{س}^3 + \Delta \text{س}^2 + \dots$$

$$\text{بعض} = \text{ب} + 1 + \text{ب} + \text{س} + \text{ح} + \text{و} + \text{س}^2 + \dots$$

$$\frac{\text{ص} - \text{بعض}}{\Delta} = \frac{\text{س} + \Delta + \text{س}^2 + \dots - \text{س} - \text{س}^2 - \dots}{\Delta}$$

$$= \frac{\text{س} + \Delta + \text{س}^2 + \dots - \text{س} - \text{س}^2 - \dots}{\Delta}$$

$$= \frac{\text{س} + \Delta + \text{س}^2 + \dots - \text{س} - \text{س}^2 - \dots}{\Delta}$$

$$\frac{1}{\omega} = \frac{\text{ص}}{\omega \text{ من}} = \text{ب} + \text{س} + \text{ح} + \text{و} + \text{س}^2 + \dots$$

ونرى أن استخدام هذه النتيجة في تفاضل عدد كبير من العبارات، نخذ

أولا الفصلة  $\text{ص} = \text{ب} + \text{س}$   
والمحتج الذي هذه معادلته مبين في ش ١٥٤ في الباب الثامن حيث

$$\text{م} = \text{ب} + \text{س} = \text{أ} \text{ أي } \text{ص} = \text{ب} + \text{س}$$

ونرى تبير صورة العبارة السابقة بوضع  $\text{م} = \text{ل} + \text{لوم} = \text{ل}$

وعلى ذلك تصبح المعادلة  $\text{ص} = \text{ب} + \text{س}$

والآن  $\text{ل} = \text{س}$  عبارة عن نفس الشعب الكبير كمتسلسلة القوى

$$\text{ل} = \text{س} + \text{س}^2 + \text{س}^3 + \dots$$

وقد رأينا في الفصل السابق أنها المتسلسلة غير المحدودة

$$1 + \text{ل} = \text{ل} + \frac{\text{ل}^2}{2} + \frac{\text{ل}^3}{3} + \frac{\text{ل}^4}{4} + \dots$$

وعلى ذلك يمكن أن نضع المقدار  $\text{ص}$

$$(\text{ب} + 1) + \text{س} + \text{ل} = 1 + \frac{\text{ل}^2}{2} + \frac{\text{ل}^3}{3} + \frac{\text{ل}^4}{4} + \dots$$

ونحصل على قيمة  $\frac{\text{ص}}{\omega}$  بتفاضل الحدود المتشابهة كل حد على حدة:

وعلى ذلك يكون

$$\frac{\text{ص}}{\omega} = \text{ل} + \frac{\text{ل}^2}{2} + \frac{\text{ل}^3}{3} + \frac{\text{ل}^4}{4} + \dots$$

$$\text{ل} = 1 + \frac{\text{ل}^2}{2} + \frac{\text{ل}^3}{3} + \frac{\text{ل}^4}{4} + \dots$$

$$\text{ل} = \text{م} = \text{لوم}$$



وعلى ذلك إذا كان ص = ب + م فإن  $\frac{ص}{ص} = \frac{م}{ص}$

وإذا كان ب = م = ١ يكون ص = ١  $\frac{ص}{ص} = \frac{١}{١}$

ص = ص

وهذه إحدى المميزات الكثيرة التي تستحق الذكر التي تجعل الضرب مبرهاً جدياً في فامرس الرياضيات، وهو يعني أن المثلث عند أية نقطة يكافئ عدد الوحدات التي يمثلها إجمالاً البعد.

ولا يزال هناك شئ أكبر من المحيطات يتضمن كلا المتالين الآخرين وتمثله المعادلة العامة

ص = ل + م + ن + ك

وإذا أن الثابت ك يمتد في الفاصل، كما سبق، فنحن في حاجة إليهم فقط بالصورة البسيطة أي

ص = ل + م + ن

ويطبق قاعدة أرشيبديس يمكننا أن نكتب ص = ل + م + ن + ك وما

أن نحدد ثابت، فكون ن عدداً ثابتاً أيضاً، ونكتب ص = ل + م + ن

للاحتصار أي أن ص = ل + م

∴ ص = ل + م + ن + ك + ... +  $\frac{ل^٢}{٢} + \frac{ل^٣}{٣} + \frac{ل^٤}{٤} + \dots$

ص = ل + م + ن +  $\frac{ل^٢}{٢} + \frac{ل^٣}{٣} + \frac{ل^٤}{٤} + \dots$

+  $\frac{ل^٥}{٥} + \dots$

∴ ص = صفر + ل + م + ن +  $\frac{ل^٢}{٢} + \frac{ل^٣}{٣} + \frac{ل^٤}{٤} + \dots$

+  $\frac{ل^٥}{٥} + \dots$

ص = ل + م + ن +  $\frac{ل^٢}{٢} + \frac{ل^٣}{٣} + \frac{ل^٤}{٤} + \dots$

ص = ل + م + ن +  $\frac{ل^٢}{٢} + \frac{ل^٣}{٣} + \frac{ل^٤}{٤} + \dots$

ويمكن أن نكتب العبارة ص = م + ن + ل على الصورة ص = م + ن + ل = م + ن + ل

ويمكن أيضاً أن نكتب طرفتين معادلة نوع آخر من جنس شبيه بهذا من المحيطات هي

ص = ل + م + ن + ك

ونذكر أن  $\frac{ص}{ص}$  هي النسبة بين ضلعين في مثلث بارو، يمكننا أن نضع

$\frac{ص}{ص} = \frac{ل}{ص} + \frac{م}{ص} + \frac{ن}{ص} + \frac{ك}{ص}$  = م + ن + ل + ك

و تكون النتيجة حينما نأخذ الريموز  $\frac{ص}{ص}$  = م + ن + ل + ك

ص = ل + م + ن + ك

$\frac{ص}{ص} = \frac{ل}{ص} + \frac{م}{ص} + \frac{ن}{ص} + \frac{ك}{ص}$

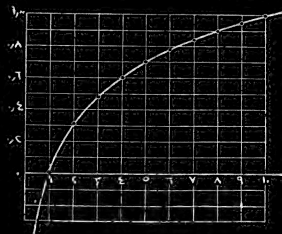
(١)  $\frac{ص}{ص} = \frac{ل}{ص} + \frac{م}{ص} + \frac{ن}{ص} + \frac{ك}{ص}$

وهذا يعني أن ميل المنحنى يتناسب عكسياً مع  $y$  وبوجه المنحنى نحو  
الاستواء كلما كبرت  $x$  كما في المنحنى في ش ١٧٦ الذي ينتمي إلى النوع الشبيه  
ص = لو. ب. س  
وسنرى أن

$$\frac{لو. ب. س}{٢,٣٠٣} = \frac{لو. ب. س}{١,٠٠٠}$$

$$٢,٣٠٣ \cdot ص = لو. ب. س$$

$$١,٠٠٠ = ص \cdot ٢,٣٠٣$$



شكل (١٧٦)

الرسم ثانياً للمعنى ص = ١,٠٠

$$\frac{١}{ص} = \frac{لو. ب. س}{٢,٣٠٣}$$

وقد رأينا أنه حينما يكون ص = ١,٠٠، ب يكون ص = ٢,٣٠٣

وعلى ذلك إذا كان ص = ٢,٣٠٣، فإن  $٢,٣٠٣ = \frac{ص}{٢,٣٠٣}$

$$\frac{١}{٢,٣٠٣} = \frac{ص}{٢,٣٠٣}$$

$$\frac{١}{١,٠٠٠} = \frac{ص}{١,٠٠٠}$$

ونوع مهم آخر من نفس الجنس هو ص = لو (ب + ١) ٦

$$ص = ب + ١$$

$$أى ص = ص - ب = \frac{ص}{ص}$$

$$\frac{١}{ب + ١} = \frac{ص}{ص}$$

ولا تزال هناك فصيلة أكبر من المنحنيات التي تتضمن المثال السابق  
معادلتها العامة

$$ص = لو (ب + ١) ج$$

$$أى ص = ج = لو (ب + ١) أى ب + ١ = ص - ج$$

$$أى ب = ص - ج - ١$$

ولو أبدلنا ب ب ص فإنها تكون من نفس الطراز الذي معادلته ص

$$= ب + ١ - ج$$

$$= - ج$$

$$\frac{١}{ب + ١} = \frac{ص}{ص}$$

$$لو (ب + ١) ج = ص$$



$$\therefore \text{لو (س + ب)} = \frac{\text{ص} - \text{ح}}{1} + 6\text{س} + \text{ب} = \frac{\text{ص} - \text{ح}}{1_e}$$

$$\therefore \text{س} = \text{ب} - \frac{\text{ص} - \text{ح}}{1_e} \quad \therefore \frac{\text{ص} - \text{ح}}{1_e} = \frac{1}{1} = \frac{\text{و س}}{\text{و ص}}$$

$$\frac{\text{س} + \text{ب}}{1} = \frac{\text{و ص}}{\text{و س}} = \frac{1}{\text{س} + \text{ب}}$$

والفصيلة الأخيرة التي نريد لحصها تمثلها ص = حاس 6 ص = جئاس 6 وهناك طرق متعددة للحصول على المعاملات التفاضلية لهذه المنحنيات، ومنها

$$\text{من الارتباك سكتب المعاملات } \frac{6}{\text{و س}} (\text{حاس}) - \frac{6}{\text{و س}} (\text{جئاس})$$

والطريقة الأولى مبنية على حقيقة أنه حينما تكون وحدة س زاوية نصف القطر فإن

$$\text{جاس} = \text{س} - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^3}{3!} - \frac{\text{س}^4}{4!} + \dots$$

$$6 \text{ جئاس} = 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots$$

وهذه مثل 6 س تنتمي إلى الفصيلة الكبيرة

$$\text{ص} = 1 + \text{س} + \text{ب} + \frac{1}{2}\text{س}^2 + \frac{1}{6}\text{و س}^3 + \dots$$

$$\text{وعلى ذلك يمكن أن نضع } \frac{6}{\text{و س}} (\text{حاس})$$

$$= 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots$$

$$= 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \text{جئاس}$$

$$6 \frac{6}{\text{و س}} (\text{جئاس})$$

$$= 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \text{جئاس}$$

$$= 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots + \text{جئاس}$$

$$\text{وسترى بسهولة من هذا أن } \frac{\text{و حاس}}{\text{و س}} = \frac{\text{و جئاس}}{\text{و س}} = 1 - \frac{\text{س}^2}{2!} + \frac{\text{س}^4}{4!} - \frac{\text{س}^6}{6!} + \dots$$

$$\text{والمثل } \frac{\text{و جئاس}}{\text{و س}} = \frac{\text{و جئاس}}{\text{و س}}$$

ويمكن أن نحصل على نفس النتيجة بطريقة مبنية على حساب الثلاث الأولى دون أن نستخدم المتسلسلات النهائية وإنما نستخدم المعادلات الآتية :-

$$\text{حاس} (\text{س} + \Delta \text{ س}) = \text{حاس جئاس} \Delta \text{ س} + \text{جئاس حاس} \Delta \text{ س}$$

$$\text{وإذا قسمت س بـ } \Delta \text{ فان } \frac{\text{حاس} \Delta \text{ س}}{\Delta \text{ س}} = 1 \text{ وعلى ذلك يمكن أن نضع}$$

$$\frac{\Delta \text{ ص}}{\Delta \text{ س}} = \frac{\text{حاس} (\text{س} + \Delta \text{ س}) - \text{حاس}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\text{على الصورة } \frac{\text{حاس جئاس} \Delta \text{ س} + \text{جئاس حاس} \Delta \text{ س} - \text{حاس}}{\Delta \text{ س}}$$

$$\text{وحيثما تكون } \Delta \text{ س صغيرة بدون جد، فان جئاس } \Delta \text{ س} = 1, 6 \text{ حاس جئاس} \Delta \text{ س} = 1 - \frac{\Delta \text{ س}^2}{2}$$

وعلى ذلك فهذا يجوز أن  $\frac{\Delta}{\Delta} = \text{جاس} = \frac{\text{حاس}}{\Delta}$  جاس =  $\frac{\text{حاس}}{\Delta}$

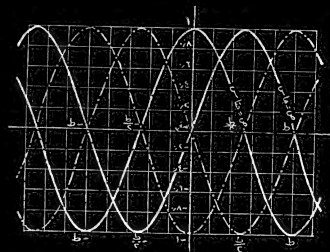
وسوف لا نجد صعوبة في تضاعف حاس جاس باستخدام المتسلسلات اللامائية

$$\text{حاس} = 1 - \frac{(1)}{2!} + \frac{(1)}{3!} - \frac{(1)}{4!} + \dots$$

$$1 - \text{جاس} = \frac{(1)}{2!} - \frac{(1)}{3!} + \frac{(1)}{4!} - \dots$$

والطريقة الأساسية هي تعيينها كطريقة لـ  $\frac{\Delta}{\Delta}$  التي أعطيناها قبلًا، وسوف

$$\text{نجد أن } \frac{\Delta}{\Delta} = (\text{حاس}) - \text{جاس}$$



شكل (١٧٧)

إبراهيم البني المصباح ص = جاس و جاس = حاس و جاس = حاس و جاس = حاس

ولوضعنا  $\frac{\Delta}{\Delta}$  فهذا يعادل

$$\frac{\Delta}{\Delta} = \frac{(\text{حاس})}{\Delta} = \text{جاس}$$

وبينك ١٧٧ أن المصباح ص = جاس و جاس = حاس و جاس = حاس  
 $\text{جاس} = \text{جاس} = \text{جاس}$  مثل كلها الحركة الدورية أو التسمية  
 بالحركة الموجية، والنتائج التي حصلنا عليها لماسات المصباح ص = جاس  
 $\text{جاس} = \text{جاس}$  تعني أنه إذا كان قياس كالاراحة الأفقية للبدن يتناسب  
 دورياً مع الزمن، فبعدل بمرور وعجلته يتناسب دورياً مع الزمن أيضاً. وهو  
 عندما يتوضح دزائم للفرقة التي ربط الجبر الحديث لجبل يونان الآلات  
 الحديثة بميكانيكا الأجسام الساكنة. وقد اقترن قانون الزنبرك الممتد باسم  
 روبرت هوك صديق نيوتن، ويبدو أنه أول من لاحظ التركيب الجلي  
 للأجسام كما ترى تحت المجهر المكتشف حديثاً. وسوف لا يدهشك أن تعلم  
 أن خواص الزنبرك الممتد لفتت نظر العلماء حينما اجندت الساعة مركز الرغبة  
 بين المختبرات المعاصرة، وبين لنا قانون هوك للزنبرك الممتد الممثل في ص ٩٩  
 أن النسبة بين النقل (و) المعلق في طرف الزنبرك وبين المسافة (ل) التي امتد  
 خلالها الزنبرك نسبة ثابتة، ويمكن أن يكتب هذا  $W = L$

ولا ينتج النقل المستعمل تأثيره الخطأ، وهو يعدل إلى أسفل ضد القصور  
 أو قوة مرونة الزنبرك في الاتجاه المضاد. وتكون النتيجة النهائية توازنًا بين  
 الاثنين. وقد حل محل الطريقة الاستاتيكية القديمة لقياس القوة بدلالة  
 الأقال إلى توازن بعض البعض في حالة السكون، مما يتخذ نيوتن من جعل  
 تحول المادة المتحركة أو القصور كأساس لطريقته في الميكانيكا. وإن لم تكن  
 للزنبرك، فإن النقل المعاني يسقط نحو الأرض مكتسبا سرعة تجاه مركزها  
 بعدل ٣٣ دفما في الثانية، وتبعاً لوجه النظر النيوتنية يكون القصور الذي  
 يوازن النقل - تقريباً على مقدار المادة أو الكتلة (ك) المتحركة، ومعدل فقدانها  
 للسرعة، وعلى ذلك إذا كانت الكتلة هي الوحدة (والجرام الآن هو الوحدة  
 في النظام العالمي)، فإن القوة التي يبدونها الزنبرك هي ببساطة معدل فقدان

السرعة في الاتجاه إلى أسفل، ولذا كان هذا الذي  $\frac{\Delta}{\Delta}$  (بعد تعديل زيادة)



للحركة الدورية لتقل معلق في طرف زنبرك . ولا يختلف المنحنيان إلا من حيث تقطعان المحور الأفقي ، أى قيمة  $L$  حينما يكون  $z = 0$  ونحن في حاجة لأن نعرف هذا لكي نختار أى جواب منها نستخدمه ، وجواب المعادلة التفاضلية ليس عددًا ، وإنما هو فصيلة من الأعداد ، وأى عضو نختاره من هذه الفصيلة ، ولزوجة هذا اعتبر الصورة التي كتبنا بها قانون هوك ، ونحترنا هيندا القانون أن مقدار النقل المتضاف لمسافة معلومة ( $L$ ) عند طرف الزنبرك جلاها لا يتغير في المدى تكون فيه القاعدة تقريباً جداً حلاً نلاحظه ويمكن كتابة هذا أيضاً .

$$z = \frac{v}{\omega}$$

أى أنه إذا أخذنا طول الزنبرك الكلى ( $L$ ) على محور السينات ، والنقل المستعمل ( $z$ ) على محور الصادات ، كان الرسم مستقيماً بميله  $m$  ، والمعلومات العملية التي يشتملها هذا التقرير هي كم يستطيل الزنبرك إذا أضفنا ثقلاً معيناً ، وليس هذا نفس الشيء كما نختارنا الطول الفعلي للزنبرك إذا أضفنا هذا النقل . ويكون ميل المستقيم  $m$  إذا كانت معادلته

$$m = m + c$$

أو كما أخذنا  $z$  على محور الصادات ،  $L$  على محور السينات

$$z = \frac{v}{\omega} + c$$

وإذا كتبنا قانون هوك هذه الصورة ، فيمكننا أن نستخدمه لإيجاد طول الزنبرك الفعلي حينما نضيف ثقلاً معيناً ، على شرط أن تكون  $z$  على علم بطوله حينما يعلق في طرفه نقل آخر ، ولينصريح أن الزنبرك عند  $z = 0$  بوجهه لكل أرفق ، فيمكننا أن نكتب معادلة الزنبرك هكذا

$$z = \frac{v}{\omega} + c$$

وإذا علمنا أن طول  $L$  بوضات حينما يعلق في طرفه نقل مقدار  $z = 0$  أوقات

$$L = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\frac{2\pi}{T}} = \frac{vT}{2\pi}$$

وعلى ذلك تصبح المعادلة  $z = \frac{v}{\omega} + c$

وهنا يمكننا أن نجيب طول الزنبرك إذا ما علق في طرفه أى نقل ، فنحذف

$$L = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{2\pi}$$

وعلى ذلك يكون الطول  $L = \frac{vT}{2\pi}$  بوضات

ويجب أن تشمل الصورة التي تعطى بها نتيجة معادلة تفاضلية ثابتاً مثل  $c$  في المعادلة السابقة إذا ما أردنا أن يكون لها أى استخدام عملي في الحساب والمعادلات التي تستخدم في العلوم الحديثة تنتمي رئيسياً لهذا الطراز الذي ناقضه الآن . والطريقة التي تستخدم في حلها تشابه كثيراً ما يستخدمه المليون وطبع ، النتيجة ، فاعلمنا الآن أن يعرف نوع الجواب الذي يمكن أن تأتي منه المعادلة ، ثم نضبطه تبعاً لذلك .

وهناك بعض أمثلة بسيطة جداً من معادلات تفاضلية سوف نقابلها في القسم الآتي —

$$(1) \text{ لإيجاد } z \text{ إذا كان } \frac{dz}{dt} = \frac{v}{\omega}$$

نعلم أنه إذا كان  $z = 0$  فإن  $\frac{dz}{dt} = \frac{v}{\omega}$  فإن  $z = \frac{v}{\omega} t$

وعلى ذلك إذا كان  $z = 0$  فإن  $z = \frac{v}{\omega} t + c$

فإن  $z = \frac{v}{\omega} t + c$

$$z = \frac{v}{\omega} t + c$$

$$z = \frac{v}{\omega} t + c$$

وعلى ذلك يكون الحل  $\frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$  من  $1 + \frac{1}{6}$

(ب) لإيجاد  $\frac{1}{6}$  من  $1 + \frac{1}{6}$  كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

نعلم أنه إذا كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

فإن  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

وعلى ذلك إذا كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

فإن  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

(ج) لإيجاد  $\frac{1}{6}$  من  $1 + \frac{1}{6}$  كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

وحل هذه المعادلة معطى في الجدول السابق أى  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

(د) لإيجاد  $\frac{1}{6}$  من  $1 + \frac{1}{6}$  كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

نعلم أنه إذا كان  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

وعلى ذلك إذا وضعنا  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

$\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

فإن  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

وعما أن  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

فإن  $\frac{1}{6} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$

التكامل: قامت ادعاءات نسبة بين نيوتن وبين لينتز معاصرة في القياس الأوروبى، عن أهمها يعتبر مؤلفا لحساب التفاضل لا نهائىة الصغر، وقد دعت هذه الادعاءات إلى مناقشات، نستحق الاعتبار لاعتدائها على الحقيقة دوراً ليس بالصغير، وقد عكست هذه المناقشات الجدلية نظرية فريدة دقيقة على تاريخ العلوم. ولم يكشف أحد حساب التفاضل، بل كان إنتاجاً تفسيرياً مجموعة من الرجال، وإن احتجنا لفصل حدث ما لنعبره بدءاً لحساب التفاضل، فظهر أن الفضل في ذلك يجب أن ينسب إلى بارو أستاذ نيوتن، وإن احتجنا لفصل حدث ما لنعبره بدءاً لحساب التكامل، ويكون ذلك معرفة أن تقدير أية مساحة هو بمعنى حل لمعادلة تفاضلية، ويرجع الفضل في هذه الخطوة أساساً إلى لينتز، الذى أنشأ أيضاً الرمز  $\frac{1}{6}$ ، وأهم ما تفجنا به ليعتق أن بين كيف يمكن استخدام المعادلات التفاضلية في تفسير الحقائق المشاهدة في الميكانيكا والفلك والبصريات، وبذلك أكد الفائدة غير المألوفة للظرق الجديدة.

ولم تكن مسألة إيجاد دس الميخى جديدة حينئذ من بارو، ومثلته التفاضلى، كما لم تكن طريقة إيجاد المساحة باستخدام المستطيل التفاضلى جديدة حينئذ، بل كانت بارو قد استخدمها بالفعل. وقد استخدم الباباتيون هذه الطريقة مستفيدين حوالى نفس الوقت، وقد استخدمها والس أحد أساتذة نيوتن في إيجاد متسلسلة لاكسية ط، وقد أوردنا الهيئة الأساسية لطريقته قبلاً في الباب السادس صفحة ...، ولو رجع القارئ مرة أخرى إلى ما قلناه سابقاً عن طريقة الباباتيون في إيجاد ط، فليس هناك من حاجة للدخول في هذه النقطة. وقد عرف التكامل قبلاً كإيجاد المساحة المحصورة بين جزء من الميخى ومستقيمين يورانين يحوران السادات ومارين يفرق هذا الجزء من الميخى. وبين من محور السينات محصور بين هذين المستقيمين (س = ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، ٧، ٨، ٩، ١٠) والمساحة المخططة في شكل ١٧، تقسم إلى ثلثين مستطيلة أذنا كل منها  $\frac{1}{6}$ .



وكما يمكننا إيجاد قيمة تقريبية للعامل التنافض برسم ثامن بالمسطرة وقياس الزاوية التي يصنعها مع محور السينات بمنقلة: فيمكننا أيضاً إيجاد اقرب جيب لمساحة كالتي نعتبرها الآن، بقياس الارتفاع (ص إلى ص<sub>١</sub>) لكل مستطيل خارجي، وضرب مجموع هذه الارتفاعات في اتساع الشقة  $\Delta$  ص، وفي الرسم  $\Delta$  ص =  $\frac{1}{2}$ ، وستكون النتيجة أكبر من الحقيقة بكمية تساوي تقريباً  $\frac{1}{2}(\Delta - \Delta_1)$  ص

والسما في حاجة لأن نقبس ارتفاع كل مستطيل فعليا ، إذا علينا معادلة المنحني ، وهي في هذا الرسم ص =  $\frac{1}{1+x}$

وعلى ذلك إذا بدأنا في تقسيم الوحدة على محور السينات إلى ستة أقسام  
 $(\Delta = 6)$  لإيجاد المساحة المحصورة بين  $y = 6$  و  $y = 2$  فإن أول  
 قيمة للمتغير  $x$  يحصل عليها بالتعويض عن  $x$  بالمقدار  $1$  في المعادلة  
 وحصل على القيمة الثانية بالتعويض بالمقدار  $2$ ، والثالثة بالمقدار  $3$ ،  
 وهكذا حتى  $x = 6$ ، وعلى ذلك تكون قيم  $x$  إلى  $6$  المتتالية هي

وتتكون مساحة جميع المستطيلات الخارجة

$$(1) \eta \xi = \left( \frac{1}{r^2} + \dots + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{1} \right) \frac{1}{2} =$$

وہذا یكون کثیراً بحوالی  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$  (ص - ص  $\frac{1}{2}$ )

والله حصول على ص  $\frac{1}{2}$  نضع  $s = 3$  في معادلة المنحنى، وعلى ذلك

فالزيادة التي نطرحها تساوي تقريبا  $\frac{1}{17} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right)$  و ٣١

والنتيجة التي هي ٦٩٣، لا يمكن أن تزيد عن هذا القدر، وعلى ذلك يمكننا

أن يجعل الخلق صغيراً بحسب الإرادة، يجعل  $\Delta$  من صغيره بقدر ما يمكن  
وقد بدأ التقدم الحقيقي لحساب التكامل حيثما يشن اليدى كيف يوجد  
صغره بسيطة المجموع عند ما يكون  $\Delta$  من صغيراً جداً (وس) بحيث يمكن  
إعمال (ص - ص) (وس)

وإنما له ليزال يوجد أناس جهلاء يحسبون متوسط قياس سبعة ملح  
لورطيين في المائتين المذكورة. ويتخونون من هذا المتوسط ببلأ المع الغريب  
العلوية عنه. فإذ بما يسحق الذكر أن نذكر أن سبعة جمجمة البقر، وكسبعة  
جمجمة أناتول فرانس، كانت أقل من المتوسط لأي - كان بدائين.

وقد أضحى البشتر الحركة في قياس المساحة لتقبل على كد التزيينات المتتالية، كالتي فيها في الباب السادس من ... إلخ بإحدا قيعه ط. وسورف ترى كيف قلم بها في ش ١٨٠ حيث المساحة التي تريد إيجادها هي المساحة المظلمة المحدودة من أعلى بجرد المنحني ف، ومن أسفل بجرد محور السينات  $y = 4 - x^2$  وبالرمز الذي سنبينه إياه الآن تكون المساحة المظلمة هي  $\int_0^2 (4 - x^2) dx$  أو  $\int_0^2 (4 - x^2) dx$

أولاً، التحليل الإحصائي: الصادرات كقطاع من مخرجات البطالة والبطالة في  
المنطقة، وبمقدار ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، تتركز في القطاعين الزراعي والصناعي،  
والأخرى هي في مجرى البنية التحتية. إذاً، دعنا نأخذ القطاع الزراعي، فنحن نرى أن  
على ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، ٦٠٪ من إجمالي الصادرات،  
دعنا نأخذ القطاع الزراعي، فنحن نرى أن ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، ٦٠٪ من إجمالي الصادرات،  
ساحتها ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، ٦٠٪ من إجمالي الصادرات، ٦٠٪ من إجمالي الصادرات.

$$\Delta \text{ ص} = \frac{e \Delta}{\Delta \text{ ص}}$$

وإذا كانت  $\Delta$  من صفة الزجاء كأيها ومثل كتاب هذا









وإذا كانت  $Q = 0$  فنكون قيمة هذا التكامل  $\int_0^1 (1+Q) dx = 1$  ومن الممكن أيضاً أن يوجد قيمة لـ  $Q$  هذه الساحة بطريقة تشابه الطريقة التي استخدمناها للدائرة  $Q$  حيث يمكن أن نكتبها (أنظر ص ١٠٠)

$$(1 - s + s^2 - s^3 + \dots) \text{ و } s$$

ولو كان المعامل التفاضلي للمقدار  $x$  هو المتسلسلة

۱۔ س + س = س  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

ولو أخذنا المساحة بين  $s = 0$  (ف = 0)  $s = 6$   $q = 6$  فإن  $c = 6$  حينما يكون  $s = 0$  وعلى ذلك يكون  $a = 6$

ومن هذا يحصل على المتسلسلة اللوغارتمية

وتحقق هذه المتسلسلة على شرط ألا تزيد  $\epsilon$  عن ١، وعلى ذلك يمكننا أن نستخدمها لحساب اللوغاريتمات للأساس  $e$  لأي أعداد  $x$  يدها تقع بين ٢٦١.٠٢٦ والحصول على  $\epsilon$  أو ١,٣٥، نضع

$$\dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 = \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \cdot \frac{1}{2}$$

و ينتهي هذا إلى سلسلة تخلق بسرعة أي

$$\left(\frac{1}{24} - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{1.24} + \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{72} + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{2}\right) \frac{1}{3}$$

ربا المثل الحصول على ٢ بحد أن

$$\dots + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} = (1 + 1) J_e$$

$$\dots + \frac{1}{122} + \frac{1}{90} + \frac{1}{67} + \frac{1}{50} + \frac{1}{32} + \frac{1}{20} =$$

والمستسيلة اللوغارتمية بجانب أنها مفيدة لحساب اللوغاريتمات ، فإنها  
توصلنا أيضا إلى طريقة أخرى لحساب ط . وما علينا إلا إدخال الكيس  
التخيلية (  $\sqrt{-1}$  ) ، والحصول على مستسيلة لجنا ،  $\sqrt{-1}$  ، كما جئنا نقاس الزوايا  
نصف القطر ، فإننا استخدمنا قبل المعادلة

$$\frac{1}{\frac{1}{\frac{1}{x}} + 1} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + 1} = \frac{1}{1 + x}$$

$$e = \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$$

$$e_1 = e_2 = \dots = e_n = 1 \quad (1 + \epsilon)$$

والرجوع إلى ص ..... فسوف نذكر قاعدة إجماع لوغان تم عدد مرفوع  
لأنه قوة أي

$$e_{\text{لو}} = e_{\text{ت}} = 1$$

وَمَا أَنْ لَوْ غَارَتْهُمُ الْأَسْمَانُ يَسْأَلُ دَائِمًا ۱ (  $e = e \dots e = e$  )

لو  $e = 1$  است

وعلى ذلك  $1 - e$  لو جانا  $= e$  لو  $(1 + \text{ت ظا})$

وباستخدام المتسلسلة اللوغارتمية نضع  $Q = \text{تخطا}$

$$\frac{1}{3} \text{ ظ }^2 + \frac{1}{2} \text{ ظ }^2 - 1 \text{ ظ } = (1 \text{ ظ } + 1)$$

$$\frac{1}{0} + \frac{1}{2}$$

وبوضع القيم العددية لقوى ت نحصل على

$$١ = (١ + ت ظا ١) = ت ظا ١ + ت ظا ٢ + ت ظا ٣ + ت ظا ٤ + \dots$$

$$ت - ١ = ت - (١ + ت ظا ١) = ت ظا ٢ + ت ظا ٣ + ت ظا ٤ + \dots$$

وبذا نذكر قاعدة الكثرى والمهر ، نجد أن

$$ت = ت ظا ١ + ت ظا ٢ + ت ظا ٣ + \dots$$

وبمكننا استخدام هذه المسألة لإيجاد ط بطرق متعددة وقد علينا

ملاحظة المهر أن ط  $(\frac{ط}{٤})$  زوايا نصف القطر (أي ط ٤٥°) = ١ ، وعلى

ذلك إذا كان  $\frac{ط}{٤} = ١$  فإننا نجد أن

$$\frac{ط}{٤} = ١ = \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٤} + \dots$$

$$= ١ - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}) - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}) - (\frac{١}{٤} - \frac{١}{٤}) - \dots$$

$$= ١ - (\frac{١}{١٥} + \frac{١}{٦٣} + \frac{١}{١٤٣} + \frac{١}{٢٥٥} + \dots)$$

ونختن هذه المسألة بطر شديد ، ويمكننا أن نحصل على صورة مريحة

$$\frac{ط}{٦} \text{ أكثر باستخدام قيم أخرى من قيم ظا ١ ، مثلا ظا ٣٠ أي أن ظا } \frac{ط}{٦}$$

$$= \frac{١}{٣} ، وعلى ذلك إذا كان ١ = \frac{ط}{٦} \text{ فإن}$$

$$\frac{ط}{٦} = (\frac{١}{٣})^١ + (\frac{١}{٣})^٢ + (\frac{١}{٣})^٣ + (\frac{١}{٣})^٤ + \dots$$

$$= (\frac{١}{٣})^١ + (\frac{١}{٣})^٢ + (\frac{١}{٣})^٣ + \dots$$

$$= (\frac{١}{٣})^١ + (\frac{١}{٣})^٢ + (\frac{١}{٣})^٣ + (\frac{١}{٣})^٤ + \dots$$

$$= (\frac{١}{٣})^١ + (\frac{١}{٣})^٢ + \dots$$

$$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} + \dots$$

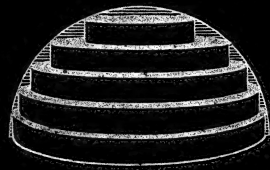
$$= \frac{١}{٣} + \frac{١}{٩} + \frac{١}{٢٧} + \frac{١}{٨١} + \dots$$

$$= ٣١٤$$

وحين تكتم بهذه الطريقة ، نرى أن الحدود المتتالية تصغر بسرعة أكثر من مثيلاتها في الكسر العشري الدائر ١/٣ ، وعلى ذلك فالنتيجة الأخيرة صحيحة قطعاً لرفين عشرتين .

وتساعد طرق حساب التكامل بصفة خاصة في حل المسائل المتعلقة بقياس المساحات ، وهذا ما دعانا إلى أن نقول عنها قليلاً جداً في الآن . وبعد

المناسبة فإن الحيلة الأساسية التي تستخدمها قديمة جداً . وأرشميدس الذي أوجد  
قيعة للكعبة مبنية على تقسيم الدائرة إلى عدد كبير من الشقق المثلية التقريبية  
زعم أن ديموقريطس أعطى القيمة الصحيحة لحجم الهرم باعتباره مجموع عدد  
كبير جداً من الشقق . ومن المحتمل كثيراً أن يكون أب المادية الإغريقية قد  
استقى طريقته من المصريين . ويوجد الآن في موزيكو قرطاس يظهر أنه بين  
أنه كان لدى المصريين صيغة صحيحة لحجم الهرم . ومساحة الكرة ح. إلى  
١٨٠٠ ق. م . ومن المحتمل أن تكون أعمال الإسكندرانيين الباهرة مدينة  
بدرجة كبيرة إلى بقاء القياسات المصرية أكثر من كون عاداتنا في كتابة التاريخ  
كنتاج من دراسات التراجم خليفة بالإعلان . وكيفية إيجاد مساحات المجسمات  
وحجومها مثل المخروطات والأهرامات والكرات والمجسمات الناقصة

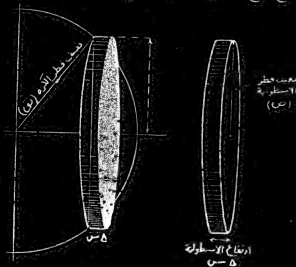


يكن (١٨٢)

مساحة الكرة وحجمها

باستخدام حساب التكامل يمكن توضيحها بالشكل الذي له أهمية عظمى في  
دراسة الفلك ، فالكرة (أو المخروط) يمكن أن ينظر إليها كمجموع عدد  
كبير جداً من الشقق الأسطوانية (أنظر ش ١٨٢) كما ينظر تماماً إلى الدائرة  
كمجموع عدد كبير جداً من المستطيلات (ش ١٨١) ويمكن جعل قطعة  
مستطيلة من الورق لتتطابق تماماً على السطح الكلي للجدار الزاوي للأسطوانة ،  
إذا جاز إنساع الورقة . سائياً . تتابع الأسطوانة ، وعلى ذلك فمساحة سطح  
الجدار الزاوي للأسطوانة مستطيل أحد ضلعيه الانحناء ، والضلع الآخر

يساوي المحيط  $2\pi r$  أي أن المساحة تساوي  $2\pi r \times$  ح. وحجم الجسم  
الذي يتساوى مقطعه المستعرض في كل مكان يساوي حاصل ضرب مساحة  
المقطع في الارتفاع ، وعلى ذلك فحجم الأسطوانة هو  $\pi r^2 \times$  ح. وللحصول  
على مساحة الكرة أو حجمها (ش ١٨٣) نشرع بوضع سلسلة من الشقق  
الأسطوانية الممتدة متجاورة ومتتالية على محور السينات ، ويكون ارتفاع  
كل أسطوانة مسطحة  $\Delta$  من إذا أقيمت على قاعدتها ، وناظر نصف قطر كل  
أسطوانة الإحداثي الصادي للمقطع الدائري المستعرض للكرة . ولو كانت  
نصف قطر الكرة  $r$  . فيمكن الحصول على  $\pi r^2$  نصف قطر كل أسطوانة من  
المعادلة  $\pi r^2 = \pi r^2$  . ويكون حجم كل شقة  $\pi r^2 \Delta$  .  
 $\Delta = \pi r^2$  (ح. - ح.)  $\Delta$  من وذلك يكون حجم نصف الكرة  
متساوياً بمجموع جميع الأسطوانات جنباً يصبح  $\Delta$  من صغيراً بدون حد . أي



شكل (١٨٤)

استخدام حساب التكامل في الحصول على حجم الكرة

 $\pi r^2 = \pi r^2$  (ح. - ح.)

ولإيجاد حجم نصف الكرة علينا أن نحل المعادلة التفاضلية



الكاملة بمقدار معين . أي نسبة الشغل الذي يحصل عليه من لفة إلى الشغل الذي ومطناه في لفة .

وتتوقف الكفاءة في عصر آلات الاحتراق الداخلي على استخدام قوة المرونة الغاز عروصاً عن قوة المرونة الزنبرك . وتتوقف نظرية آلة الاحتراق على قانون مرونة الغازات . وبإتاحة القرن السابع عشر كانت المسائل الصناعية لمعالجة المعادن قد جذبت انتباه الطبيعيين . وبين المسائل الصناعية التي ظهرت في الدف الغائصة كانت المضخات والتوربوتية كثيرة الأهمية . وأخذت المسألة نصيبها من الانتباه حينما بدأت الدراسة العلمية الميكانيكا تتقدم . وروبرت بويل الذي يرتبط ارتباطاً وثيقاً بواك ونيوتن . اختراع مضخة الهواء . وقدم بأول تجارب مسجلة عن كيف تكسح الغازات وتتمدد حينما يؤثر الضغط أو يقل . والقانون الفيزيائي الذي اكتشفه بويل هو أن حجم غاز ( ع ) والضغط المؤثر عليه ( ص ) يرتبطان بالمعادلة

$$ص = \frac{1}{ع}$$

في هذه المعادلة مقدار ثابت ، ولو كان مساوياً ١٥ ، فيكون المنحنى

$$ص = \frac{1}{ع} \quad \text{حيث } 150 \text{ حيث}$$

وليفتاس كفاءة آلة احتراق داخلي ، تكون منبأ لتأني أن يوجد كم من الشغل الذي يندل في ضغط المكس مسافة معينة ، ينتج فعلاً . بواسطة العجلات والمكس معاً . حينما يدفع الأجر خلال نفس المسافة في نفس الاتجاه نتيجة تمدد الغاز . وسوف ترى من العنوان المتصل بشكل ١٨٥ أنه إذا ضغط الغاز من الحجم ق إلى الحجم ق . فهذا هو نفس الشيء . مثل

$$ق = \frac{1}{ص} \quad \text{حيث } 150 \text{ حيث}$$

وإذا قيس ع على محور السينات فيكون هذا التكامل

$$ق = \frac{1}{ص} \quad \text{حيث } 150 \text{ حيث}$$

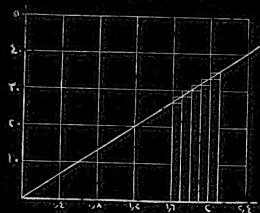
ويحصل على قيمة هذا من جداول اللوغاريتمات .

$$\frac{1}{ص} = \frac{1}{16.7} \quad \text{حيث } 150 \text{ حيث}$$

$$\text{وهذا يعني حل } \frac{ع}{16.7} = \frac{1}{ص} \quad \text{أي أن } ع = \frac{16.7}{ص}$$

$$\text{وجنبا يكون } 150 = ع = \frac{16.7}{ص} \quad \text{حيث } 150 \text{ حيث}$$

القوة الكاملة للزنبرك المستطيل



الشكل (١٨٤)

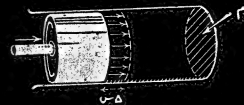
من = المسافة الممتدة بالبوصات

ص = القوة ( النقل ) المؤثرة بالبوند

وعلى ذلك يكون الشغل الكلي الذي يمكن بذله في استطالة الزنبرك من ١.٦ إلى ٣.١ من البوصات

$$\frac{16.7}{2} (3.1 - 1.6) = 12.5 \text{ بوند - بوصة}$$

ونسمي هذه الكمية المقدار الذي زادت به الطاقة الكاملة للزنبرك حينما استطال من ١.٦ إلى ٣.١ من البوصات . ونفاس كفاءة آلة تيار بالزنبرك عند الشغل الميكانيكي الذي يمكن أن تبدله العجلات حينما تزيد الطاقة



٥٨

شكر (١٨٥)

هو قاذف إزدياق إنجليزي . وسماجه يمتد إلى سبعة (٦) في كل مكان تكسوفاته .  
فيكون حجمه م م م . وإذا دفع المكبس سافة  $\Delta$  م . فيكون التمر في جسم القاذف داخل  
المكبس م م م . ويقاير الضغط في ميكانيكا الغازات بانقواء إلى انقباض وحدة المساحات  
ويقاير الضغط حاصل ضرب القوة المؤثرة في المسافة المقبوضة . رأى في م م م .  
ثم صارت . وإذا دفع المكبس سافة  $\Delta$  م م م . فقدر طاقة نتيجة الانقباض . ويكون  
الشيء المنبسط في  $\Delta$  م م م . وهذا يمكن كتابته م م م . والتغير الصغير الذي  
جاء في الحجم الذي يحد بالانقباض م م م . يمكن أن يكتب  $\Delta$  م م م . والمقدار الصغير  
من الشيء م م م . وعلى ذلك  $\Delta$  م م م . م م م .

الرياضة في العصر النيوتني : عندما يصرف النظر عن الأهمية الخيالية التي  
أصبحت لأعمال نيوتن ، تبقى الحقيقة البارزة حول حياته العملية هي الاتجاه الذي  
جعله قادراً على استخدام الطرق الجديدة الناتجة من اتحاد الجبر والهندسة .  
وكان التقدم بالطرق الجديدة أقل مبررة مما يجب أن يكون . لأن التقدم الذي  
بهمواء الفن الجديد بقضاء أعداد الرمل وجبر نيوتن وديوفانتس . ولم يتحقق  
القادة المقلدون في العصر النيوتني من أن كل تقدم عقلي يظهر مسألة استبدالية  
في التربة . وقد خصص نيوتن جزءاً كبيراً من نشاطه لتدبير إثباتات عملة في  
الهندسة الإقليدية بدلاً من محاولة أن يجعل طريقة الجديدة مفهومة لمعاصريه .  
وكانت إحدى نتائج هذا أن التقدم بين الميكانيكا النيوتنية لم يجل في بلده في  
أثناء القرن الذي تلا نشر الأصول ( البرنسبيا ) .

ونسبح على الدوام في هذه الأيام عن قيود ميكانيكا نيوتن والطريق  
الرياضية التي استخدمها . وحينما نعرف بوضوح ما حية هذه القيود ، يرى  
الحقيقة السافرة في أن الطرق النيوتنية بحدت وسبقه طويلاً أساليب الحساب  
في العلم الطبيعي . وقد توصل طرق أخرى في أغراض معينة إلى نتائج يتحقق

مع الحقائق أكثر من سابقها . وحينما تقوم بذلك فإنما تقوم به على حساب  
عمل عقل مشغوع وبين سبيل فوق مستوى فهم الرجل العلمي المتوسط ، ولا  
يزال أبعد بكثير عن فهم الرجل المتوسط الذي ليس بعلمي ، حتى يكون  
الرياضي راغباً في طلب مساعدة التربويين . ولسنا مستعدين لترك ميزان البقال  
المستخدم في المطبخ حتى يمكن أن ينتج ميزاناً كيميائياً يساويه في الرخص  
ويترن بسرعة مثله . وإلى وقتنا هذا كانت الطرق النيوتنية هي خزنة الرياضي  
المتحرّ . ويمكن عمل الكثير البسيط الصعوبات في فهمها واستعمالها إذا بدأنا  
بمعرفة قيودها بدلاً من اكتسابها في نهاية طريق طويل يحير من الميكانيكا التي  
فيها تندرج كرات ثمانية الملائمة على مستويات ثمانية المسادة ، وتدور عجلات  
حول نخورها غير المشجعة دون أي احتكاك بالمرّة . ولا يوجد شيء يمكن أن  
يؤدي إلى تقدم سريع في الفهم البشري أكثر من مؤتمّر سنوي بين تلاميذ  
المدارس ومعلميها والعلميين القدماء ، ويجب أن يجبر العليون على الحضور  
تحت تهديد جرائمهم من حقوقهم المعاشية .











ضرب ٤٢١ في ٣١٥ حسب نظام رقعة الشطرنج التالي ( صف وعمود ) :

٤٠٠	٠٠٠	١٠٣	٦٠٣	٢٠٣	٤٠٣
٠٠٠	١٠١	٦٠١	٢٠١	٤٠١	٠٠١
١٠٥	٦٠٥	٢٠٥	٤٠٥	٠٠٥	١٠٥

ومن الممكن أيضاً تمثيل هذه العملية كما يأتي

١٠٥	٦٠٥	٢٠٥	٤٠٥	٠٠٥	٠٠٥
٠٠٠	١٠١	٦٠١	٢٠١	٤٠١	٠٠٠
٠٠٠	٠٠٠	١٠٣	٦٠٣	٢٠٣	٤٠٣

في مثل هذا الترتيب يدل وجود حاصل ضرب مائل ٤٥٠ ، أو ١٠٣ في عمود معين على أنه معامل قوة معينة من قوى العدد ١٠ ، كما أن موضع حواصل الضرب هذه في الصفوف الأفقية قد لوحظ فيه أن يكون كل من هذه الماملات في عموده الرأسى الصحيح ، والكلمة الغنية لمثل هذا الترتيب هي « مولدة » وهو ترتيب يجعل من السهل أن نتذكر مجموعة من العمليات ، كما يجعلنا نقصد في استخدام الرموز وذلك بإعطاء معنى خاص لكل واحد منها نتيجة للخلية التي يشغلها في المصفوفة .

وأى فرع من فروع عيلى الجبر التي تعتمد على طريقة التميز بالخلية هذه هو جبر المولدات وقواعد مثل هذا الجبر لا تتوقف إلا على الهدف الذى نطمح إليه .

في القرنين السابع عشر والثامن عشر وصل العلماء إلى نتائج باهرة في بحثهم عن متسلسلات القوى وعواملها ، تلك المتسلسلات التي تبسط عملية أعداد جداول الزغزغات والنسب المثلثية ، وكانت هذه الدراسة تعتمد على قاعدة الموضع في بعد واحد فقط .

وفي القرن التاسع عشر ، بدأ أكتشاف علوم الجبر الأخرى التي تعتمد على نفس الفكرة في بعدين . وأول علم من هذه العلوم تبثت فائدته هو جبر المحددات ، وهو ليس إلا طريقة لحل المعادلات الآلية . ولكن فهم أعمق

## الباب الحادى عشر

جبر الشطرنج وورق اللعب

لا ريب أن القارىء الذى طالع الفصول السابقة من هذا الكتاب قد رأى كيف أصبحت فائدة الرياضيات بما يعترف به الجميع فيها وحدها يكشف الانسان عن آفاق جديدة . وعلى ذلك يمكننا قبل أن نتناول جرعة جديدة من هذا الدواء أن نقطع السلام الحين ونسير في هذا الباب دون الرجوع إلى الأحداث التاريخية أملى أن نحدد في بعض مادته تسلسلة لطيفة كما هي حال الرياضة دائماً بالنسبة للذين يكسبون عيشهم عن طريقها . وسنرى في الباب الأخير أن الطريق الذى يسير فيه لا يوصلنا إلى الحدائق الفناء إذا وضعنا نصب أعيننا الوصول إلى الغاية التي استهدفها ليكون هو تزويد الحياة البشرية بالقوى الجديدة والاختراعات . والقارىء الذى يله له دراسة التاريخ أيضاً سوف يكون قادراً على تحديد موضع هذا الكلام من تاريخ المفاهيم الإنسانية .

رقعة الشطرنج :

رأينا في الباب السابع أن تفوق الطريقة الهندية العربية في الحساب يرجع إلى أنه في هذه الطريقة يكون لكل قوة من قوى الأساس ١٠ مكان معين ، وعلى ذلك تكن الرموز العشرة ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠ للتعبير عن أى عدد محدود مهما كان كبيراً وكذلك للتعبير عن أى كسر محدود . ومع ذلك فليست هذه هي الميزة الوحيدة ، ولا هي بأهم الميزات لقاعدة الموضع . فهذه القاعدة توضح العمليات التي يمكن إجراؤها على العداد ، كما يمكننا من إجراء هذه العمليات بدون الاستعانة بالعداد .

يعتمد تمثيل العدد في الطريقة الهندية العربية على قاعدة الموضع في بعد واحد فقط ، أى على ترتيب معين يوضح متسلسلة قوى في خط مستقيم . أما الطريقة الهندية ، أى قاعدة إجراء الحسابات فهي تستخدم ضمناً نفس الفكرة في ترتيب ذات بعدين . فمثلاً يمكننا إجراء الخطوة الأولى من عملية



$$س = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٠ - ٦ = -٦$$

ويمكن أن نتحدد أكثر إذا كتبنا المادتين الإضافيتين على الصورة:

$$\begin{aligned} ١ &= ١ + ٢ + ٣ \\ ٢ &= ٢ + ٣ + ٤ \end{aligned}$$

فيأخذ الحل الصورة:

$$س = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ٠ - ٦ = -٦$$

يمكننا الآن أن نكتب المحددات نفسها في صورة أكثر اختصاراً، وذلك

بأخذ الزمن العام من للصف:

$$\begin{aligned} ١ &= [١٢٣] = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \end{vmatrix} \\ ٢ &= [٢٣٤] = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} \\ ٣ &= [٣٤٥] = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{vmatrix} \end{aligned}$$

في هذه الصورة الأكثر اختصاراً يكون

$$س = [١٢٣] + [٢٣٤] + [٣٤٥] = [١٢٣] + [٢٣٤] + [٣٤٥]$$

حسباً

$$١ = ١ + ٢ + ٣ = ٦$$

وعن لم تدخل أى قواعد جديدة في كل ما سبق ، وإنما أدخلنا رموزاً جديدة فقط للمساعدة على تذكر طريقة الحل بدون إجراء الخطوات الأولية خطوة خطوة . وكلمة محدد ، هي ببساطة اسم لاطار الضرب الصافي المتماثل الذي يكتبه بالكامل على هيئة مجموعة ٢ × ٢ . وعندما نعلم القيم العددية لعناصر الخلية ، نكتب قيمة المحدد ، كما فعلنا من قبل ، فمثلاً

$$٧ = ٢ \times ٤ - ٥ \times ٣ = ٨ - ١٥ = -٧$$

إذا حفظنا هذا الاطار ، يمكننا أن نأخذ في كل المادتين الآتيتين كما يأتي:

$$\begin{aligned} ١ &= ٢ - ٥ = -٣ \\ ٢ &= ٣ - ٤ = -١ \end{aligned}$$

$$س = \begin{vmatrix} ٢ - ٥ & ٣ - ٤ \\ ٣ - ٤ & ٤ - ٥ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -٣ & -١ \\ -١ & -١ \end{vmatrix} = ٣ - ١ = ٢$$

$$س = \frac{(٢-٥)(٣-٤) - (٣-٤)(٣-٤)}{(٢-٥)(٣-٤) - (٣-٤)(٣-٤)} = \frac{٢ - ١}{٢ - ١} = ١$$

$$٢ = \frac{٦ + ٤ - ١٥}{١٥ - ١٦} = \frac{١}{-١} = -١$$

$$٣ = \frac{٨ + ٥ - ١٦}{١٥ - ١٦} = \frac{-٣}{-١} = ٣$$

ويمكن جعل قاعدة الحل أكثر وضوحاً ، إذا كتبنا الاطار التالي الأسامي

على هيئة مصفوفة أبعادها ٣ × ٢:

$$س = \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٤ & ٥ \end{vmatrix} = ١(٢ \times ٤ - ٥ \times ٣) + ٢(٣ \times ٥ - ٤ \times ٦) + ٣(٤ \times ٦ - ٥ \times ٧)$$

من هذه المصفوفة يمكننا الحصول على ثلاثة محددات لكل منها صفان وعمودان أي

$$[ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ح} & \text{د} \end{smallmatrix} ] = \Delta (س)$$

$$[ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{و} & \text{ز} \end{smallmatrix} ] = \Delta (ص)$$

$$[ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} \\ \text{ي} & \text{ك} \end{smallmatrix} ] = \Delta (ح)$$

وباستخدام طريقة الرمز هذه نجد أن :

$$س = \Delta (س) \div \Delta (ح) \quad 6 - ص = \Delta (ص) \div \Delta (ح)$$

ويمكن كتابة ذلك على الصورة :

$$\frac{س}{\Delta (س)} = \frac{ص}{\Delta (ص)} = \frac{1}{\Delta (ح)} \quad (٣)$$

جرب استخدام هذا القانون بعمل معادلات يمكنك اختيار صحة جولوها من الجائز بعد ذلك أن يتبادل القارئ : هل توجد أية فائدة يمكن استخلاصها من قانون مختصر مثل هذا لعملية بسيطة للغاية مثل حل المعادلات الآتية التي تحتوي على مجهولين فقط ؟ والجواب على هذا السؤال هو أنه لا يوجد أية فائدة سوى أننا وجدنا طريقاً قد يؤدي إلى التفكير بنظام لتبسيط الحل الشاق للمعادلات الآتية التي نسطر فيه في العادة إلى جنون عدد كبير من التكتيكات المجبولة ، ولكنني أود في هذا الطريق يجب أن نلاحظ أولاً اختلاف الإشارات في (٢) ، وأن نأخذ في كتابة قاعدة حل مجموعة من المعادلات الخطية المجهولة على ثلاثة مجهول : على نفس الصورة (٣) . لتكن المعادلات في الصورة الأساسية كما يأتي

$$ا + ب + ص + ح + د = ٥$$

$$ب + ح + د + ص + و + ز = ٥$$

$$ب + و + ز + ك + م = ٥$$

بدالة التي أرمدها  $٣ \times ٤$  في هذه الحالة هي

$$[ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ] = [ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ]$$

وباستخدام الاصطلاح الوارد في (٣) ، يكون

$$\Delta (س) = [ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ]$$

ويبين أن نسب الحكم عن كيفية تفسير معنى هذا المحدد الذي أبعاده  $٣ \times ٣$  ، سمعطى هنا فقط الصورة التي يأخذها هذا المحدد

$$\Delta (س) = [ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ]$$

بالنظر

$$[ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ] = [ \begin{smallmatrix} \text{ا} & \text{ب} & \text{ج} & \text{د} \\ \text{هـ} & \text{و} & \text{ز} & \text{ح} \\ \text{ي} & \text{ك} & \text{ل} & \text{م} \end{smallmatrix} ]$$

رسم لتوضيح طريقة حل المحدد

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ١ & ٢ & ٣ & ٤ \\ ٥ & ٦ & ٧ & ٨ \\ ٩ & ١٠ & ١١ & ١٢ \end{bmatrix}$$

شكل (١٨٦)

نكتب الآن قاعدة الحل التي نتجها و تتفق مع (٣) ، إلا وهي :

$$(٤) \quad \frac{س}{\Delta (س)} = \frac{ص}{\Delta (ص)} = \frac{ح}{\Delta (ح)} = \frac{١}{\Delta (ح)}$$



وينتج من ذلك أن

$$(5) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

هذه الطريقة تعبر عن كل متغير كخارج قسمة محددين من الرتبة الثالثة  $(3 \times 3)$ ، وهو تعبير لا تكون له أية قيمة إلا أن تعطى معنى للمحدد من الرتبة الثالثة. لإجراء ذلك، يجب أن ندرس حل المعادلات الثلاث بطريقة المذف. لحذف س من المعادلتين الأولى والثانية نكتب

$$(6) \quad \begin{aligned} & \text{اهس} + \text{ب هص} + \text{ج هع} + \text{وه} = 0 \\ & \text{اهس} + \text{اوص} + \text{دع} + \text{و} = 0 \end{aligned}$$

$$(7) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + \text{ص} + (\text{ج ه} - \text{د و}) + \text{ع} + (\text{ه} - \text{و}) = 0 \\ & \text{وبنفس الطريقة نحصل من المعادلتين الثانية والثالثة على} \end{aligned}$$

$$(8) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

$$(10) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

$$(11) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

$$(12) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{aligned} & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \\ & (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) + (\text{ب ه} - \text{ا و}) = 0 \end{aligned}$$

بمقارنة (١٠) و (٥) نرى فوراً أن تعريفنا للمحدد من الرتبة الثالثة يجب أن يعنى:

$$(11) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(12) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(13) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(14) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(15) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(16) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(17) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(18) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(19) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$(20) \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \div \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 4 \cdot 4 + 6 \cdot 1 = -10$$

$$37 = (0-2)6 + (0-8)4 - (1-20)3 =$$

وكثيرين مفيد للقاري، تكون معادلات تحتوي على ثلاثة مجاهيل وحقق أن قيم  $\alpha$  من  $\alpha$  التي تحصل عليها بالخلاف متفقة مع القيم التي نحصل عليها من (٥) إذا عبرت عن المحددات من الرتبة الثالثة حسب التاعدة التي ذكرناها الآن. المثال الآن يوضح حل ثلاثة معادلات ذات معاملات ثابتة.

$$2\alpha + 3\beta + \gamma = 9$$

$$5\alpha + 2\beta + \gamma = 4$$

$$3\alpha + 6\beta + \gamma = 2$$

بترتيب المعادلات على الصورة الأساسية، نجد أن المصفوفة التي أبعادها  $3 \times 4$  هي

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

وتعطي قيمة من  $\Delta$  كما يأتي

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 2(2-9) - 3(5-3) + 1(30-15) = -10$$

حيث

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -10$$

$$124 = (20)9 + (8)4 + (16)3 =$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 5 - 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = -10$$

$$62 = 36 - (22)3 - (20)2 =$$

وعلى ذلك يكون  $\alpha = 124$ ،  $\beta = 62$  أي  $\alpha = 124$  و  $\beta = 62$  نفس الطريقة نجد أن  $\gamma = 37$  أي  $\gamma = 37$ .

المحددات في الحالة العامة: — تعرف المحدد من الرتبة الرابعة بطريقة مشابهة لتعريف المحدد من الرتبة الثالثة، أي مجموع أربعة محدّدات من الرتبة الثالثة  $(3 \times 3)$  كل منها مضروب على الترتيب بمحدود الصف العلوي مع تغيير الإشارات على التبادل. وعلى ذلك تكون قاعدة إيجاد قيمة المحدد من الرتبة الرابعة هي

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & \omicron & \pi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \nu & \xi & \omicron \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \pi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \nu & \xi & \pi \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \nu & \xi & \omicron \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \iota & \kappa & \pi \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \epsilon & \zeta & \eta \\ \nu & \xi & \pi \end{vmatrix}$$

وسهلة أولية، ولكنها شاقة، يمكن إثبات أن حل مجموعة من أربعة معادلات تحتوي على أربعة متغيرات  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$  في الصورة الأساسية

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \epsilon & \zeta & \eta & \theta \\ \iota & \kappa & \lambda & \mu \\ \nu & \xi & \omicron & \pi \end{vmatrix} = 0$$

يمكن وضعه في صورة مشابهة للحل (٣) أي

$$\frac{\alpha}{\Delta} = \frac{\beta}{\Delta} = \frac{\gamma}{\Delta} = \frac{\delta}{\Delta} = \frac{\epsilon}{\Delta} = \frac{\zeta}{\Delta} = \frac{\eta}{\Delta} = \frac{\theta}{\Delta} = \frac{\iota}{\Delta} = \frac{\kappa}{\Delta} = \frac{\lambda}{\Delta} = \frac{\mu}{\Delta} = \frac{\nu}{\Delta} = \frac{\xi}{\Delta} = \frac{\omicron}{\Delta} = \frac{\pi}{\Delta}$$

ويكون ذلك كل من المحددات الخمسة الأربعة المذكورة في هذا المفكوك على



$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 1 = 0$$

وتتضح القيمة العملية لهذه القاعدة من دراسة المجدد

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 - 0 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 0 = 2$$

بتطبيق قاعدة إمكان تغيير الترتيب، يمكننا حذف أحد العناصر في خطوة واحدة، وذلك لأن من الممكن كتابة المجدد على الصورة

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 0 + 0 = 2$$

وتغيير الترتيب هنا ليس ضرورياً، وذلك لأنه حسب القاعدة، يمكن فك المجدد بأحدى طريقتين:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$$

القاعدة الثانية: تبادل عمودين كل محل الآخر، أو تبادل صفين كل محل الآخر يعبر إشارة القيمة العددية للمجدد. فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -0 = 0$$

وتتضح القيمة العملية لهذه القاعدة من حقيقة أنها يمكننا من الحصول على الصف العلوي، أو العمود الأول، مختاراً على صفر أو أكثر، وبذلك نتخلص من عناصر المجدد المناظرة، فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 6 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - 0 + 3 \cdot 0 - 0 = 6$$

القاعدة الثالثة: تتلشى قيمة المجدد إذا تساوى فيه صفان أو عمودان

أي أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

تتضح إحدى فوائد هذه القاعدة من نفسها عند دراسة معنى القاعدة الآتية: القاعدة الرابعة: ضرب جميع حدود أحد الصفوف أو أحد الأعمدة للمجدد في نفس العامل ك، يكافئ ضرب القيمة العددية للمجدد في ك، فمثلاً

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 39 & 4 & 3 \\ 13 & 8 & 0 \\ 26 & 10 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 4 & (39-42) \\ 13 & 8 & (13-13) \\ 26 & 10 & (26-18) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 39 & 4 & 42 \\ 13 & 8 & 13 \\ 26 & 10 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} (3-2) & (5-2) & (8+3) \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ (1-2) & (4-5) & (0-8) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

$$2315 = 89 \times 26 = (26-23-1) \times 26 =$$

القاعدة السادسة: جمع أو طرح مضاعفات حدود شعاع (أو أشعة) من حدود شعاع (أو أشعة) مواز (أو موازية) لا يغير قيمة المحدد، فنلا

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 11 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -8 \end{vmatrix}$$

هذه القاعدة هي تجمع للقاعدة السابقة باستخدام القاعدة الرابعة نستخدم هذه القاعدة في حساب قيمة المحدد السابقة.

الحدى فورا، هذه القاعدة هي اختصار القيم العددية لحدود المحدد قبل إيجاد مفكوكه، فنلا.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} \times 5 = \begin{vmatrix} 3 & 9 & 1 \\ 21 & 24 & 8 \\ 21 & 9 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 40 & 30 \\ 21 & 24 & 40 \\ 21 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

ونستخدم هذه القاعدة مع سابقتها (٣) كما يأتي

$$\begin{vmatrix} 5 & 40 & 0 \\ 8 & 24 & 8 \\ 3 & 9 & 3 \end{vmatrix} \times 5 = \begin{vmatrix} 10 & 40 & 30 \\ 16 & 24 & 40 \\ 6 & 9 & 10 \end{vmatrix}$$

وعلى ذلك يمكننا أن نهمل أى عناصر في المفكوك، إذا كانت النسبة بين الحدود المتناظرة في صفين أو في عمودين ثابتة.

القاعدة الخامسة: جمع أو طرح حدود صف أو عمود من الحدود التي

تتناظرها في صف أو عمود آخر يوازيه لا يغير قيمة المحدد، أى أن

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 7 & 8 & 8 \\ 7 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

باستخدام القواعد السابقة يمكننا حذف أى عنصر وذلك بتغيير ترتيب الصفوف، والأعمدة إلى نحصل على حد يساوى صفرا في الصف العلوى أو في العمود الأول. باستخدام القاعدة الأخيرة يمكننا (أولا) أن ندخل حدودا صفرية جديدة وذلك يجعل الحدود المتناظرة في الأشعة المتوازية متساوية، (ثانيا) نحذف القيمة العددية التي علينا أن نحذفها بدرجة كبيرة. والمثال الآن يبين جميع الخطوات الأخيرة التي نجرىها بالتحقق الموزون باستخدام مساحة من الورق أقل بكثير من المستخدمة هنا:









وحسب القاعدة السابقة ثلاثي قيمة هذا المحدد ، بالرجوع إلى القاعدة السابقة يمكننا أن نحصل على شرط وقوع ثلاثة فقط على خط مستقيم واحد بطريقة مختلفة عن السابقة مستخدمين النتيجة للحالة التي تقع فيها أربعة فقط مستو واحد الصورة العامة لمعادلة الخط المستقيم هي  $ax + by + c = 0$  والمعاملات الثابتة  $a, b, c$  ، نأخذ نفس قيمتها عند البعض بالاحتمالات  $(a, b, c)$  ،  $(-a, -b, -c)$  أو  $(a, -b, c)$  وهي إحداثيات الثلاثة فقط  $a, b, c$  التي تقع جميعها على نفس المستقيم ، ولكن علينا أن نعين هذه المعاملات الثابتة

ممكنا كتابة المعادلات على الصورة:

$$s = u + v$$

۱۰۰ میں ۱ + ۱۰۰ میں ۱

$$s = u + 1$$

وذلك لحى المعادلات فى الجاهل  $\Delta$  ب  $\Delta$  باستخدام المحددات حيث  
الكميات من  $\Delta$  ص معلومة . قيمة  $\Delta$  التى نحصل عليها هى

ص ۱	۱ -
ص ۲	۱ -
ص ۳	۱ -
ص ۴	۱ -
ص ۵	۱ -
ص ۶	۱ -
ص ۷	۱ -
ص ۸	۱ -
ص ۹	۱ -
ص ۱۰	۱ -

وإذا استخدمنا الطريقة المختصرة للرمز المحددات ، يمكن وضع ذلك على الصورة

$$[1 - \frac{1}{\gamma}] = [1 - \frac{1}{\gamma}] \times 1$$

وحيث أن كلامه لا يتساوى بالانصاف ، والمحدد الموجد في

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 5 \\ \hline 1 & - & 1 \\ \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 6 \\ \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 1 & 5 \\ \hline 2 & 1 & 6 \\ \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\text{صفر} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline + & + & + \\ \hline 1 & - & 1 \\ \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & - & 1 \\ \hline 1 & - & 1 \\ \hline 4 & 1 & 4 \\ \hline \end{array} =$$

حيث أن المحدد يتلاشى ، فإن المستقيمتان تتلاقى في نقطة واحدة ، هي في الواقع النقطة  $s = 1$  ،  $t = 6$  ص ٩

يمكن للقارئ أن يقوم بتعميم هذه النتيجة لإيجاد الشرط الذي يجب توافره لكي تتحقق أربعة معادلات محتمية على ثلاثة مجاهيل فقط على الصورة

$$as + bt + cv = d$$

الشرط المطلوب هو :

وهنسبياً، هذا هو الشرط الذي يجب توفره لكي تتلاقى أربعة مستويات  
في نقطة واحدة  $n = (s, v, c, e)$ . وطبعاً يكون هذا الشرط  
ضرورياً إذا كانت المستويات تمر بنقطة الأصل  $e$  أى عندما  $m = 0$ .  
وأيضاً المحدد الصورة

• • • • •

الطرف الأيسر يساوى صفراً (باستخدام القاعدة السابقة) ، فإنه ينتج أن

$$[ص ص - ١] = ٠ = [ص ص - ١]$$

وللمحصل على الشرط اللازم للوقوع النقطتين  $٦$  ،  $٦$  ، على خط مستقيم يمر بنقطة الأصل ، نلاحظ أنه في هذه الحالة  $ص ص = ص ص = ٠$  ، ويكون الشرط المطروح هو

$$\begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix} = ٠ = \begin{vmatrix} ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١ & ١ \end{vmatrix}$$

$$١ \cdot ١ \cdot ١ - ١ \cdot ١ \cdot ١ - ١ \cdot ١ \cdot ١ + ١ \cdot ١ \cdot ١ = ٠$$

$$١ - ١ - ١ + ١ = ٠$$

$$\frac{١}{١} = \frac{١}{١}$$

وينتج هذا الشرط مباشرة من المعادلات الخطية الموضوعية على الصورة

$$ص = ص = ص + ب ، لأنه في هذه الحالة ب = ٠$$

$$١ \cdot ١ = ١ \cdot ١ = ١ \cdot ١ = ١$$

جبر ورق اللعب

قد ذكرنا باختصار في الباب الخامس الدور الذي تلعبه المضروبيات والأعداد الشكلية في موضوع تبويب الاختيارات ، وفي الباب التالي سنرى كيف أن المسائل الناتجة عن سحب عدد من أوراق اللعب من مجموعة من هذه الأوراق قد أضافت الكثير إلى معارفنا عن نظرية الاحتمالات وعند الكلام عن اختيار عينة من ٣ ورقات مثلا يحسن أن نوضح بادي ذي بدء ما إذا كان هذا الاختيار يحدث في آن واحد أو اختيار الورقات الثلاث يكون على التتابع . فإذا كان الاختيار آنياً فلا يكون فيه تكرار بمعنى أنه لا يمكن إستمرار الورقة الواحدة أكثر من مرة واحدة . أما الاختيار على التتابع فإنه

قد يكون فيه تكرار بالمعنى السابق . وهذا يحدث إذا أرجعنا الورقة المسحوبة إلى مجموعة الورق قبل السحبة التالية . ولسبب لا يعنينا أمره في هذا المكان سنقتصر الكلام على الاختيار العينة التي ترد فيها الورقة إلى المجموعة قبل السحبة التالية كما أننا سنقتصر على أن مجموعة الورق قد أعيد تنظيمها قبل كل سحبة .

وعند الكلام عدد تبويب الاختيارات قد تأخذ في الاعتبار فقط تكوين العينة باعتبار أنها الاختيار خاص ، أو تأخذ في الاعتبار تركيب مكونات هذا الاختيار باعتبار أنه تبديل خاص . فيما يلي سنتكلم عن الترتيب الخطية أي الترتيب التي تتميز بأن عناصرها ترتب في خط مستقيم ، وهو ما يحدث عندما نسحب د ورقات من ورق اللعب ونقسمها الواحدة بجانب الأخرى في خط مستقيم بحيث تكون وجوها إلى أعلى . سنبدأ بتذكير القاري ، بمبدأ سبق أن تعلمناه في الباب الخامس ، وسؤالنا الأول هو : عن عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب أوراق مجموعة ورق اللعب جميعها في خط مستقيم ؟

لتبسيط المسألة سنبدأ بمجموعة تحتوي على ثلاثة أوراق فقط ، ١ ، ٢ ، ٣ ، نبدأ أولاً بتثبيت وضع ١ عند أول المستقيم ، ونبحث عن عدد الترتيبات المختلفة للورقتين ٢ ، ٣ ، من الموضح أنه توجد طريقتان فقط لترتيب ٢ ، ٣ ، ١ : ٢ ، ٣ ، ١ و ٣ ، ٢ ، ١ ، ثبت ب الآن في الوضع الأول وأوجد الطرق المختلفة لترتيب الـ ٣ ، مرة أخرى بتبديلين فقط : ب ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، وأخيراً نبقى طريقتان فقط هما ب ، ١ ، ٣ ، ٢ ، ١ ، ٢ ، ١ ، ٣ ، من ذلك نرى أن ورقثان مختلفتان لهما طريقتان للترتيب .

ثلاث ورقات مختلفة لها ست طرق للترتيب

سأل أنفسنا بعد ذلك عن الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب جميع الأوراق في صف واحد إذا كان عدد الأوراق ٤ ( ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ) ، نبدأ ، كما فعلنا من قبل ، بتثبيت وضع ورقة معينة كل مرة على التوالي ونحدد الطرق المختلفة لترتيب الأوراق الباقية :

١. أولاً	ب. أولاً	ج. أولاً	د. أولاً
١. ب. ج. د.	١. ب. ج. د.	١. ب. ج. د.	١. ب. ج. د.
٢. د. ج. ب.	٢. د. ج. ب.	٢. د. ج. ب.	٢. د. ج. ب.
٣. ج. د. ب.	٣. ج. د. ب.	٣. ج. د. ب.	٣. ج. د. ب.
٤. د. ج. ب.	٤. د. ج. ب.	٤. د. ج. ب.	٤. د. ج. ب.
٥. ج. د. ب.	٥. ج. د. ب.	٥. ج. د. ب.	٥. ج. د. ب.
٦. ج. د. ب.	٦. ج. د. ب.	٦. ج. د. ب.	٦. ج. د. ب.
٧. ج. د. ب.	٧. ج. د. ب.	٧. ج. د. ب.	٧. ج. د. ب.
٨. ج. د. ب.	٨. ج. د. ب.	٨. ج. د. ب.	٨. ج. د. ب.
٩. ج. د. ب.	٩. ج. د. ب.	٩. ج. د. ب.	٩. ج. د. ب.
١٠. ج. د. ب.	١٠. ج. د. ب.	١٠. ج. د. ب.	١٠. ج. د. ب.

ثبت ١: في أول الصف لا يلزمنا في الواقع إلا الترتيبات المختلفة الثلاثة  
ورقات الأخرى التي نعلم أن عددها هو ٦: ونفس الشيء صحيح عند تثبيت  
ب. أو ج. أو د. عدد الطرق المختلفة لترتيب الأربعة أوراق هو  $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$   
ولذا كان المطلوب ترتيب خمسة أوراق، فإنه يمكننا تثبيت كل من الأوراق  
الخمسة على التوالي في أول الصف ويكون عدد طرق ترتيب الأربعة الباقية ٢٤  
في كل مرة. ينتج أن عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب الخمسة أوراق  
هو  $5 \times 24 = 120$  لدينا الآن الجدول الآتي

١٢ = ١ × ٢	شيطان	طريقتان للترتيب	أي
١٣ = ١ × ٢ × ٣	ثلاثة أشياء	٦ طرق	أي
١٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤	أربعة أشياء	٢٤ طريقة	أي
١٥ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥	خمس أشياء	١٢٠ طريقة	أي

أقد درسا هذه الأعداد، فهي مضروبات وبالاستمرار في العملية السابقة  
نجد أن عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب ستة أشياء هو ١٦ ، وسبعة أشياء  
هو ١٧٠ وهكذا. والرمز الذي سنظهره لتبادل أشياء عددها هو وجميعها مختلفة،  
مأخوذة جميعها معا هو:

$$1 = 1$$

وفيما يلي بعض الأمثلة لتوضيح استخدام هذه الصيغة:  
ما هو عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب الكروت المحتوية على صور في  
في صف واحد؟ (الجواب ١٦٠٠ - ٤٧٩٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب خمسة كتب على رف؟  
(الجواب ٥٠٤٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها جلوس عشرة أطفال على جانب  
واحد من مضدة؟ (الجواب ٣٢٨٨٠٠)

ما هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها قمع مجموعة من الأجراس  
عندها ٨؟ (الجواب ٤٠٣٢٠)

ما هو عدد الترتيبات الخطية المختلفة للألوان الطيف؟ (هذه الألوان هي  
الأحمر، البرتقالي، الأصفر، الأخضر، الأزرق، البنفسجي)؟  
(الجواب ٧٢٠)

الرمز  $1 = 1$  يدل على جميع الطرق التي يمكن بها ترتيب  
أوراق مجموعة ورق اللعب في صف. تتبادل الآن: ما هو عدد الطرق التي  
يمكن بها ترتيب أوراق عددها ٨: مأخوذة من مجموعة الورق السابقة. في  
صف: سترمز لهذا العدد بالرمز ٨! عدد اختيار الأوراق آتيا - ٨  
وهو نفس الشيء. عدد اختيارها على التوالي بدون إعادة الأوراق المسترجعة  
إلى المجموعة ثانية قبل سحب غيرها. لا يوجد أي رمز متفق عليه لعدد تبادل  
أشياء عددها ٨ من أشياء عددها ٨. عندما يسمح بالإعادة قبل الاختيار  
التالي. وسترمز إلى هذا العدد هنا بالرمز ٨<sup>٨</sup>. وستساعدنا الطريقة التي  
حصلنا بها على قيمة ٨! في الحصول على صيغة جواب السؤال السابق، عندما  
لا يسمح بالتكرار في الاختيار.

تخلص الطريقة السابقة فيما يأتي: نبدأ بعدد معين (٨) من المواضع  
المواضع التالية في صف ثم نملأها بنفس العدد (٨) من الأوراق. بتدليل

يكون لدينا طرق مختلفة عددها  $n$  لتفصيل المكان الأول. بعد ذلك تكون لدينا أشياء مختلفة عددها  $(n-1)$  يمكن لكل منها أن يشغل المكان الخالي الثاني، أي تكون لدينا  $(n-1)$  طريقة مختلفة لشغل هذا المكان الثاني. بعد كل ورقة من الأوراق التي عددها  $n$  التي يمكن شغل المكان الأول بها يمكننا شغل المكان الثاني بأي ورقة من الأوراق الباقية التي عددها  $(n-1)$ . أي أنه يمكن شغل المكانين الأول والثاني بطرق مختلفة عددها  $n(n-1)$ . وعلى ذلك يكون  $n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$ . لدينا الآن أوراق عددها  $(n-2)$  يمكن شغل المكان الثالث بأي ورقة منها. وعلى ذلك ينتج أنه توجد طرق مختلفة عددها  $n(n-1)(n-2)$  لشغل الأماكن الثلاثة الأولى معاً. أي أن  $n! = n(n-1)(n-2)\dots(1)$  ويمكننا الاستمرار في هذه العملية لشغل الأماكن الباقية الخالية، ويكون

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1) = (1+3+\dots+n) \quad (\text{ثلاثة عوامل})$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)\dots(1) = (1+4+\dots+n) \quad (\text{أربعة عوامل})$$

$$n! = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\dots(1) = (1+5+\dots+n) \quad (\text{خمس عوامل})$$

وعلى ذلك فإن القانون المطلوب هو:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots(1) = (1+2+\dots+n) \quad (\text{عوامل عددها } n)$$

وللاقتصاد، يمكن كتابة هذا القانون على صورة تذكرنا بالرمز المألوف:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot (1) = (1+2+\dots+n) \quad (\text{عوامل عددها } n)$$

وبطريقة الرمز المختصرة هذه، يكون  $n! = n(n-1)\dots(1)$ .

وزيادة على فائدة هذه الطريقة من ناحية الاقتصاد، فإنها تبين الفرق بين جوابنا على السؤال المذكور فيما سبق على فرض عدم التكرار في الاختيار، والجواب على نفس السؤال عندما يسمح بهذا التكرار في الحالة الأخيرة. توجد طرق عددها  $n$  لشغل أي مكان، وعلى ذلك توجد طرق عددها  $n$  لشغل المكانين الأول والثاني، و  $n^2$  طريقة لشغل الأماكن الثلاثة الأولى. وهكذا، من الممكن أن نكتب

$$\text{بدون تكرار في الاختيار} \quad n! = n(n-1)\dots(1)$$

$$\text{مع التكرار في الاختيار} \quad n^n = n \cdot n \cdot n \cdot \dots \cdot n$$

إذا لم يسمح بالتكرار في الاختيار، فإن من لا يمكن أن تزيد عن  $n$ ؛ ولكن إذا سمح بالتكرار في الاختيار فمن الممكن أن تزيد عن  $n$ . وترتبط هذه الحالة بلعبة أخرى تعتمد على الحظ. إذا كانت لدينا مجموعة من ورقة اللعب تحتوي على  $n$  أوراق فقط، فمن الجائز أن نتساءل: ما هو عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب  $n$  ورقة مأخوذة من هذه المجموعة، (حيث يمكن إعادة الأوراق إلى المجموعة به اختيارها)؟ والجواب هو  $n^n$ . وهذا السؤال يتفق تماماً مع السؤال الآتي: ما هو عدد الطرق التي يمكن بها كتابة نتائج  $n$  رمية في حط واحد؟ أو نتائج رمية واحدة لكل من  $n$  قتي عشر ذهراً؟

وفيما يلي بعض المسائل للتدريب، إذا كان القارئ يحتاج إليه قبل الاستمرار في القراءة. في كل حالة، يمكنك أن تسأل نفسك هل مسألة التكرار في الاختيار ذات أهمية؟ وإبنت عن الجوابين إذا كانت الحالة كذلك.

ما هو عدد تبادل حرفين من الحروف: ١٢٣٤٥٦٧٨٩١٠ (الجواب: ٣٠٢٥٠)

ما هو عدد المجموعات المختلفة التي تحتوي كل منها على أربعة حروف  
والتي يمكن الحصول عليها من الحروف ٦٠ ب ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ هـ ٦ و ٦ ؟

(الجواب ٣٦٠ أو ١٢٩٦)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لخمسة حروف من بين الحروف الأبجدية  
اللاتينية ؟ (الجواب ٧٨٠٣٦٠٠)

ما هو عدد التليفونات المختلفة التي يتكون كل منها من خمسة أرقام (جميع  
الخمسة الأرقام مختلفة) التي يمكن الحصول عليها من الأرقام ٠ - ٩ ؟  
(الجواب ٣٠٢٤٠)

يتكرر العدد ١١٠ ومضاعفاته (مثل ٤٤)، ما هو عدد الأعداد الواقعة  
بين ١٠٠٠ ٦ ١٠٠ ؟ (حقق النتيجة)

ما هو عدد الأعداد الواقعة بين ١٠٠٠ ٦ ١٠٠٠ والتي لا تحتوي على متاعلي  
نفس الرقم أكثر من مرة ؟ (حقق النتيجة)

ما هو عدد الأعداد التي يتكون كل منها من أربعة أرقام فردية  
(٠ ٦ ٣ ٦ ١) تكون جميعها مختلفة ؟ (الجواب ١٢٠)

ما هو عدد الترتيبات التي يمكن عملها الثلاثة ورقات من الأوراق الأربعة  
الكسرية العليا (الأس والملك والمليك والولد) ؟ حقق النتيجة باستخدام  
مجموعة من ورق اللعب (الجواب ٦ أو ١٢)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لخمسة أوراق ديتاري من مجموعة عددها ٢٣  
ورقة ديتاري إذا كنت لا تستخدم أي ورقة أكثر من مرة واحدة فقط ؟  
(الجواب ١٥٤٤٤٠)

ما هو عدد الترتيبات المختلفة لأربعة أوراق من الأوراق العليا التي  
عددها ١٦ ؟ (الجواب ٤٣٦٨٠ بدون تكرار في الاختيار)

توجد أربعة جوائز مختلفة في مسابقة هي لوحة وديك روسي وبطة  
ودجاجة. إذا كان يوجد عشرون متسابقاً ولذا فإن عدد الحاصل على أكثر  
من جائزة واحدة فاعده النتائج الممكنة لهذه المسابقة ؟ (الجواب ١١٦٢٨٠)

خمسة وعشرون طفلاً يجلسون في امتحان سابقة. توجد ثلاثة جوائز  
قيمتها ٨٠ ٦ ٨٠ ٦ ٢٠ جنباً على الترتيب ما هو عدد النتائج المختلفة للمكئة ؟  
(الجواب ١٣٨٠٠)

يجري اثني عشر طفلاً في سباق المئات ياردة. ما هو عدد الطرق المختلفة  
التي يمكن بها منح جوائز الأربعة الأوائل ؟ (الجواب ١١٨٨٠)

افترضنا حتى هذه المرحلة أن أوراق اللعب يمكن التمييز بينها بواسطة  
اللون أو الإمارة أو العلامات أو الصور. وتفتقر مسائل جديدة إذا  
الأوراق بطريقة ما مع إهمال ما يميز بين الأوراق الفردية التي من نفس  
الفصيلة. فمثلاً لو كان لدينا مجموعة من الأوراق عددها ٩ كما يأتي

بسطوي: الأس والسبعة، كيوه الملك والأس والثلاثة، ديتاري: الثمانية  
والعشرة والمليك والولد. اقدر ترتيباً الأوراق على حسب أمرة كل منها. وعلى  
ذلك فإننا نعتبر أي ترتيب للأوراق في صف واحد مكافئ لأي ترتيب آخر  
في صف واحد. إذا كان المكان الأول مشغولاً بورقة من نفس الإمارة في  
كل من الترتيبين والمكان الثاني مشغولاً بورقة من نفس الإمارة في كل من  
الترتيبين وكذلك المكان الثالث مشغولاً بورقة من نفس الإمارة في كل من  
الترتيبين. يمكننا أن نتساءل الآن: ما هو عدد هذه الترتيبات (١ + ٢ + ٣ + ٤ + ٥ + ٦)  
الممكنة لجميع الأوراق في صف إذا كانت ١ تنتمي إلى الإمارة ١  
٢ إلى الإمارة ٢ ٣ إلى الإمارة ٣ ؟

عدد إمكان تقسيم أوراق عددها ١١ إلى ثلاثة أقسام، فإننا نسير إلى عدد

الترتيبات التي عدد أقسامها ١١ بالرمز  $11 = 1 + 10 = 2 + 9 = 3 + 8 = 4 + 7 = 5 + 6$   
الحصول على جواب للسؤال السابق فافكر فيما يحدث لو أننا عملنا حقيقة أن  
الأوراق التي من إمارة واحدة تنتمي إلى نفس الشعبة. النتيجة المطلوبة للسؤال  
السابق هي ١١ حيث عدد البسطوي ٢. في كل من هذه الترتيبات يوجد  
مكانان ثابتان خاصان بالأوراق البسطوي. ونمكننا وضعها بالترتيب ١٢ ٧ ٥  
أو ٧ ٥ ١٢. وعلى ذلك فإن هذه الشعبة تحتوي على ترتيبات عددها ١٢ (١٢)  
بالمثل يمكننا أن نصل الترتيبات التي من نفس النوع على حسب مكان الأوراق



من الممكن أن تتبين كيفية الحصول على الفائزين  $n = ٤$  (٣) ٤  
 "هـ"  $n = ٤$  (شكلي ١٨٨، ١٨٩) ، بالتفكير في رقعة الشطرنج

	♠	♥	♦	♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣

(شكل ١٨٨)

الترتيبات المحتملة (اختيار في شقين)

مع التكرار (جميع الأزواج)  $٤ \times ٤ = ١٦$   
 بدون تكرار (الأزواج المختلفة فقط)  $٤ \times ٣ = ١٢$

وهذا يجعلنا نوجه اهتمامنا إلى العلاقة بين التباديل والاحتمال . كما نبيها في الباب التالي . هذان الشكلان يثيران إلى مجموعة مكونة من أربعة أشياء ، مثلا مجموعة ورق لعب مكونة من أربعة أوراق فقط ، ورقة سبائي ، وورقة كروية ، وورقة دينايري ، وورقة بطوني . إذا أعدنا كل ورقة إلى المجموعة قبل اختيار غيرها ، فإن كلا من الطارق التي عددها  $n$  (هنا ٤) للحصول على عينة مكونة من ورقتين تناظر أحد أزواج لوحة ألعابها  $n \times n = ١٦$  . وكل صف من صفوف اللوحة ينظر أحد أوراق المجموعة ، والأعمدة المتتالية لنفس الصف . تبين نتيجة اختيار أي واحدة من أوراق المجموعة بعد

أخذ الورقة التي يدل عليها المكان الموجود على بين هذا المكان . وإذا كان الاختيار بدون تكرار ، يسقط زوج واحد من هذا النوع من كل صف ، وبذلك يبقى (٣ - ١) من الأزواج في كل صف ، ويكون العدد الكلي هو  $n(n-1) = ١٢$  من الأزواج .

	♠	♥	♦	♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣
♠	♠♠	♠♥	♠♦	♠♣
♥	♥♠	♥♥	♥♦	♥♣
♦	♦♠	♦♥	♦♦	♦♣
♣	♣♠	♣♥	♣♦	♣♣

(شكل ١٨٩)

الترتيبات المحتملة (اختيار في شقين)

مع التكرار (جميع الأزواج)  $٤ \times ٤ = ١٦$

بدون تكرار (الأزواج المختلفة فقط)  $٤ \times ٣ = ١٢$

وعند توضيح الاختيار التتالي للعينات لأى التوعين هذه الطريقة ، نلاحظ أن العكسة الأساسية هي أن أى ورقة تؤخذ أولاً لها فرصة متساوية لكي ترتبط بأى ورقة من الأوراق الباقية . ويمكن تعميم طريقة اللوحة لتمثيل الترتيبات الخطية للعينات الثلاثية أو للعينات الأعلى وذلك بالتطبيق المتتالي للعكسة التى استخدمت في شكل ١٨٨ . وإذا كان الاختيار يسمح به بالتكرار ، فإنه توجد طرق عددها  $^n P_r$  لترتيب الشئين اللذين يؤخذان أولاً لعمل عينة ثلاثية . وتوجد طرق عددها  $n$  للاختيار الشئ الثالث . وعلى ذلك تضع الطرق التى عددها  $n$  للاختيار العينة المزدوجة في الجانب الأيمن وتعطى كل عينة من هذه العينات فرصة متساوية لكي تزود مع كل من أشياء المجموعة التى عددها  $n$  والتي يجمعها عليها ثانية بإعادة الأوراق المختارة قبل أخذ غيرها . الشبكة الناتجة لها عيون عددها  $n \times n = n^2$  . وإذا لم يسمح بالتكرار في الاختيار فإن الشبكة سيكون لها صفوف عددها  $n^{(1)}$  فقط بدلاً من  $n$  من الصفوف ، وستنقسم اثنتان من العينات الثلاثية من كل صف فيبقى  $(n-2)$  من الأزواج في كل صف . ويكون المجموع الكلى هو

$$n^{(1)}(n-2) = n^{(2)}$$

والسؤال الذى جوابه هو الصيغة التى يستبعد مسألة الإعادة أو التكرار ، ولكن شرط الإعادة يكون ذا صلة إذا سألنا سؤالاً مثل : لآلى ما عددها عدد الطرق التى يمكن بها اختيار عشرة أوراق من مجموعة كاملة من ورق اللعب بحيث تحتوي هذه الأوراق العشرة على أربعة أوراق كوبية ، وثلاثة أوراق ديمارى ، وورقتان سبائى ، وورقة بيطوق ؟ وبصورة عامة يمكن صياغة السؤال كما يأتى : مجموعة من الأشياء عددها  $n$  ، منها أشياء عددها  $r$  تنتمى إلى أسرة ١ ، وأشياء عددها  $s$  إلى أسرة ٢ ، وأشياء عددها  $t$  إلى أسرة ٣ ، وهكذا . ما هو عدد الطرق التى يمكن بها اختيار  $r$  من أشياء هذه المجموعة بحيث تنتمى عددها  $r_1$  منها إلى الأسرة ١ ، وعددها  $r_2$  منها إلى الأسرة ٢ ، وعددها  $r_3$  منها إلى الأسرة ٣ ، وهكذا ؟

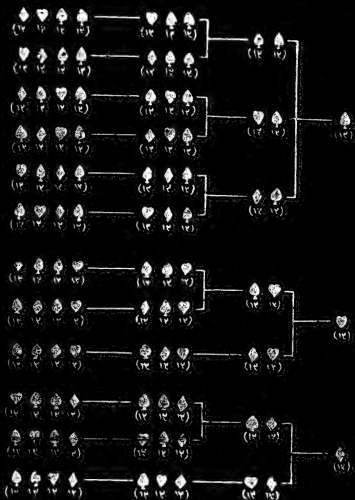
سرى في كتاب القادوم آتت الجواب على هذا السؤال هي المفتاح العام

للأب الذى يفصل بين الاختيار والخط بمساعدة صورة (١٩٠ ، ١٩١) ستزول صعوبة إيجاد هذا المفتاح . بنشأ نظام معين من حالة الثلاثة أسر ، أى الحالة التى توجد فيها ثلاثة أسر مثل ، الآسات ، والأوراق ذات الصور ، والأوراق الأخرى . في مجموعة كاملة من ورق اللعب توجد أربعة أوراق تنتمى إلى الأسرة الأولى ، اثني عشر ورقة تنتمى إلى الأسرة الثانية ، وست وثلاثون ورقة تنتمى إلى الأسرة الثالثة . نفرض أنفسنا يريد أن يعلم عدد الترتيبات في صف والتي يكون فيها وجه الأوراد إلى الأعلى للثلاثة أوراق تتكون من أربعة آسات . وثلاثة أوراق ذات صور وورقتان آجريتان . عدد أسر التباديل للست أوراق كما حددناها هو  $6! = 720$  . ويمكننا أن نقيم هذه الأسر إلى أولادها النهائية ، إذا أصبح لدينا إمكان أو عدم إمكان إرجاع كل من الأوراق الثمانية المختارة أولاً قبل اختيار غيرها .

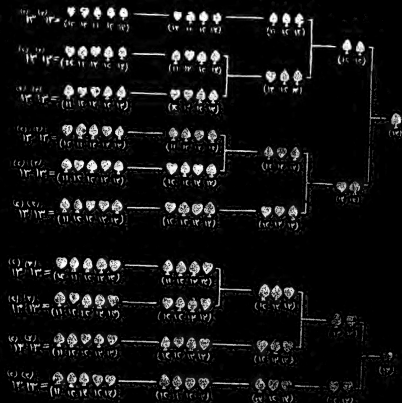
إذا كان الإرجاع يمكننا ، فإن كلا من الترتيبات التى عدد  $6!$  لها أربعة أماكن ثابتة خاصة بالآسات ، وعلى ذلك فلها  $4! = 24$  طرق لشغل هذه الأماكن . وكل من هذه الطرق متفق مع الطرق التى عددها  $4! = 24$  لشغل الأماكن الثلاثة الباقية والخاصة بالأوراق ذات الصور وبعبارة أخرى طرق عددها  $4! \times 3! = 144$  لشغل الأماكن الخاصة بالآسات والصور . وكل من هذه الطرق لا تعارض مع شغل المكاتبين الباقين بورقة لا تتكون آسا ولا صورة بطرق عددها  $3! = 6$  . وعلى ذلك فإن العدد الكلى لأخذ عينة عدد أوراقها تسعة وتتكون من أربع آسات وثلاثة ورقات ذات صور وورقتين آجريتين هو

$$\frac{6!}{4! \times 3! \times 2!} = \frac{720}{24 \times 6 \times 2} = 15$$





$$15 \times 15 \times 15 = \frac{15}{20} \times \frac{15}{20} \times \frac{15}{20}$$



$${}^{(r)}r_1! \times {}^{(r)}r_2! \times \frac{0!}{\frac{(r_1+r_2)!}{r_1!r_2!}}$$

يكون للثاني الآن أن يبرهن خطرات الإيمان في الحالة التي لا يكون فيها  
 شك أو ريب، أنه توجد  $\alpha \neq \beta$  <sup>(1)</sup> من الطرق كدغل إما تكن المشغولة  
 إلا أن في أي تبادل للون واحد أي أن الممدد السكلي للتبادل هو

$$\cdot \gamma^{(r)}_7 \cdot \gamma^{(r)}_{12} \cdot \gamma^{(t)}_\varepsilon \frac{\gamma_j}{\gamma_j + \gamma_i + \gamma_k} = r \cdot r \cdot t \int \gamma^{(r)}_9 \gamma^{(r)}_7 \cdot \gamma^{(r)}_{12} \cdot \gamma^{(t)}_\varepsilon$$

# الباب الثامن

## الاحصاء

أو

## حساب الاحصائيات

أقتصم استخدام الأعداد حتى القرن السادس عشر على الطريقة البدائية في عد الأشياء المنفصلة ولذلك لم تؤثر الأعداد إلا تأثيراً ثانوياً في تشكيل تقدم الرياضيات . وكانت حاجة القدماء من إحصاء الثروة وتعداد السكان استعداداً للحرب أو لفرض الضرائب لا تستلزم أكثر من عمليات العد البسيطة ولا تستعين بالرياضة اللهم إلا ما دعت الحاجة إليه من عمليات حسابية رتيبة عندما عم استخدام النقود وتجمعت الثروات . وفي القرن الماضي دعت الحاجة إلى طرق رياضية جديدة لمعالجة الأعداد التي تمثل أشياء منفصلة وزاد الاهتمام بهذا الأمر عندما زاد الاهتمام باستنباط القوانين الاجتماعية من إحصاءات تجري على السكان من النواحي النفسية والاجتماعية والاقتصادية . وكثير من الطرق العديدة المستخدمة في مثل هذه المواضيع بنيت على النظرية الرياضية للاحتيالات التي يستخرج مادتها في هذا الباب . وما زالت الآراء مختلفة في أهمية الاحتيالات في ظروف الجاه اليومية . ولقد برزت بشكل الآراء التي تعتبر عن رأي أصحابها في طبيعة المعرفة وقوم الطرق الاستنباطية وغير ذلك من الأمور التي يهتم بها الرياضي المحترف كما يهتم بها القارئ العادي . وبالضرورة تكون نظرة الرياضي المحترف وهو المتأثر بفلسفة المثالية مغايرة لنظرة المؤلف الذي يهتم بظواهر الحياة كما تقع فعلاً .

ولقد أفادت النظرية الحديثة للإحتيالات من أسرى يبدو أنها مستقلة أحصاءاً مسنداً من الخبرة والأخبار من الأدب . فقد نجم عن الأمر الأول أن اصمأن الناس تدريجياً إلى المغامرة بالمبالغة في اعتبار أن بعض الحوادث التي

ورقة مصورة واحدة من مجموعة من ورق اللعب ، فإنه توجد ١٢ طريقة مختلفة لأخذ هذه الورقة ، ويكون التمييز الضمني للأوراق هو تمييز زوجي ، أي أوراق ميسورة وأوراق أخرى . وحيث أن السباح بإعادة الأوراق لا يؤثر في حالة الاختيار الواحد ، فإن القانون العام يكون واحداً في حالتين السباح بإعادة أو عدمه ، أي أن

$$\frac{(1)}{(1)} = \frac{(1)}{(1)} \quad \frac{(1)}{(1)} = 12 = (12) \times (1) = (12) \times (1)$$

ومن الطرف الأيمن لهذه المعادلة المزدوجة ، نجد مرة أخرى أن

$$(1) = 1 \text{ ، ولا يكون للطرف الأيسر معنى إلا إذا كان}$$

$$(1) = 1 = (1)$$

وإذا بقي بعض الألفاظ التي يتوقف عليها استخدام القانون العام في حالتين الاختيار (١) مع السباح بإعادة (ب) مع عدم السباح بإعادة :

ما هو عدد التفضيلات في صف التي تتفق مع تركيب العينات الآتية من مجموعة كاملة من الأوراق :

عينة مزدوجة مكونة من آتين ( الجواب ١٨ ١٢ ٦ )

عينة ثلاثية مكونة من آتين وصورتين ( الجواب ١٧٣٨ ١٥٨٤ ٦ )

عينة رباعية مكونة من آتين وأجر ، وثلاث ورقات سوداء ( الجواب ١٧٣٨ ١٦٦٠ ٦ )

عينة رباعية تتكون من ورقة سبائي وورقتين ديتانيتين وورقة كوبا ( الجواب ١٧٣٨ ١٦٦٠ ٦ )

عينة رباعية مكونة من ثلاث ورقات حمراء وآتين أسود ( الجواب ١٧٣٨ ١٦٦٠ ٦ )

عينة رباعية مكونة من ثلاث ورقات حمراء وآتين أسود ( الجواب ١٧٣٨ ١٦٦٠ ٦ )

لا سلطان لنا عليها أقل أثراً على طول الزمن مما لو قصرنا النظر على فترة قصيرة من الوقت ويعبر عن هذا الكلام عادة بقانون المتوسطات . ومعنى هذا مثلاً أن متوسط سقوط المطر مأخوذاً في عشر فترات مقدار كل منها عشر سنوات هو في الغالب الأعم أقل عرضه للتذبذبات وأكثر ثبوتاً من متوسط سقوط المطر مأخوذاً في عشر سنوات متتالية . ولقد زاد من إعتقادنا في ثبوت الأعداد الكبيرة ما دللنا عليه خبرتنا في ألعاب الرول والورق والمراهبات . كما أن خبرتنا هذه قد أيقظت إهتمامنا وساعدت على تفهيمنا لقوانين الانتخاب . أما تطبيق الرياضيات على الصدفة فينبى على معرفتنا على الظروف التي يحق لنا فيها افتراض صحة تطبيق قوانين الانتخاب في الحياة اليومية .

أول إضافة عامة للنظرية الرياضية للإحتمال وجدت في مراسلة بين عالين رياضيين فرنسيين هما فرما وباسكال متراهتين في إحدى لعب الخيط . وكتاب باسكال مؤلف عن الأعداد الشككية لم يشر إلا في عام ١٦٦٥ بمبدأ موت باسكال . وبعد ذلك بسنوات قليلة أخذت الدراسة الرياضية للجائزة تتطور في صورة أخرى . ففي عام ١٦٩٣ نشرت المتقطعات الفلسفية للجمعية الملكية بلندن جدولاً للحياة مبني على المواليد والوفيات في مدينة برسلو . وكان الغرض من جدول هامى للحياة هو إعادة تقدير قيمة أقساط الحياة . وعلى ذلك يمكننا أن نقف أثر بدء النظرية الرياضية للإحتمال إلى الوراء بألعاب الخيط ونشأة التأمين . وأوروى اللبب أصلاً صني مثله في ذلك مثل الأعداد الشككية . وقد انتشرت ألعاب الورق في القصور الملكية الأوروبية في القرن الرابع عشر وأصبح إنتاج ورق اللعب من أهم الفوائد التجارية التي وجدت للطباعة من الكتل الخشبية ، وهي كذلك اكتشاف صيني ، قبل إنتاج الكتب بقرينة الطبع المتحركة . وفي هذه الحقبة كان التأمين على الحياة قد أصبح تجارة كبيرة ، أما التأمين على السفن فقد أصبح صورة هامة للعلامات المالية في الفترة التي أخذت فيها التجارة البحار تنتشر في أوروبا العصور الوسطى . ويمكننا بدراسة تاريخ التجارة البحرية الهولندية أن نقف أثره إلى بداية القرن الرابع عشر . وفي القرن السادس عشر كان التأمين قد أصبح معاملة مالية معترف بها ، وقد

تساول السير نيكولاس بيكون في حديثه إلى أول برلمان في عهد الملكة اليزابيث قائلاً : ألا يضحى التاجر العاقل يوزن من تجارته التأمين على الباقي ؟ . والكتاب القديم لم يجمعوا على ربط التأمين بالحرص . وفي هذه المراحل الابتدائية كان يعتبر التأمين مقامرة بخنة وكان يوضع في صف التذوات ذات السمعة البئير الطيبة . ويرتبط أصل التأمين على الحياة بهذه الأعمال ذات السمعة السيئة . لم يكن إقراض المال بفائدة عالية إلى الأحرار . مع إحتمال خطير بفقدان القرض بعد عدة من السنين . ولا منح القروض للبعاملات التجارية في الأسواق هما الأساس الوحيد للقوة التي بدأت تظهر للبال في القرنين الرابع والخامس عشر . فإلى جانب القروض التجارية التي كانت تعقد في الأسواق ، أخذ الناس في مواولة الرهان على حياة الأشخاص ومولد الأطفال وغيرها من الأمور الغريبة . وخلال القرن السادس عشر ، صدرت قوانين كثيرة للحد من نشاط البودجات والدوائر المالية الأوروبية في عقد القروض التجارية ، بينما حرمت هذه القوانين أنواعاً مختلفة من التأمين بالراحة لاعتراض السلطات الدينية على مواولته بصدقة .

ويشكو أحد كتاب القرن السادس عشر فيقول : بعض النبلاء والتجار ... يستخدمون كل ما لديهم من رأس مال في المضاربات المالية ... بينما تبقى الأرض بدون حرث وتهمل تجارة المواد الأساسية للحياة . وكثيراً ما ترتفع الأسعار . . . والمبني كجزء الذي كان يستخدم الخرو سكوت ليقتبأ بأسعار المنقفل والباجر مائة أسير عين مدمعة . كان عاهلاً بالعمل دائماً مثل رجل معه ماء . ومرجوب في الخيط . ولم تكن المضاربات المسالمة التي أثرت أضراراً تجارية المراكز المتوسطة تستند إلى أساس أقوى من التنبؤ . وعلى ذلك فهي كانت إلى حد كبير مقامرة بكل ما في الكلمة من معنى . ففي أسواق العصور الوسطى كان التجار أصحاب رأس المال يقامرون على جنس الطفل قبل ولادته أو على ميعة وفاته شخص ما . وقد أعطى جوريزي في مؤلفه عن مستعمرات البحار الجنوبية أمثلة على هذا النوع من التأمين بالمقامرة وهو أصل التأمين على الحياة . فنلا يوجد تعلقاً بين روميجو سبيون مار وأخيه برناردو وبين أمرأتين بنص حتى أن يدع الأحرار إلى ما يليق باللاتين : يا ولداً كان العاقل أبقى بينما



هذه الطريقة ، والذي وجدته بأسكال هو العلاقة الضمنية بين شكل<sup>(١٨)</sup> ١٨٩٠١٨٨ في الباب الثاني عشر . وبمعرفة الطرق المختلفة لاختبار عينة ذات تركيب معين بدلالة عدد التباديل المختلفة التي تتفق مع تركيبها ، نكون قد أدخلنا فكرة تساوي الفرصة لأي عنصر اختير أولاً لأن يوجد مع أي العناصر الباقية وهكذا . . . ويمكننا فهم طريقة دراسة بأسكال للسألة إذا حاولنا كالآتي . إذا داومنا بتخفيف مجموعته من ورق اللعب ، فإننا نعطي كل ورقة فرصة أفضل لكن تردود مع أي ورقة أخرى . وإذا أخذنا في اختبار عينات ( ثلاث ورقات كما سبق ) من المجموعة ، فإن النتائج التي نحصل عليها من تكرار هذه التجربة تبين أن فرصة كل ورقة للردود مع أي ورقة أخرى تتساوى . والخيرة بألعاب الورق تؤيد هذا العرض ، ومع ذلك فمن الممكن اختبار صحة ويستعطي فيما بعد نتائج تجربة من هذا النوع

لقد افترضنا أنه في عملية اختبار ثلاثة حروف من بين أربعة ، أو ورقتي لعب من بين ٥٢ ورقة ، ستبعد حالة اختبار نفس الشيء مرة أخرى . وطبعاً الممكن حدوث ذلك ( أي تكرار اختبار نفس الشيء ) إذا كنا نعيد هذا الشيء إلى مكانه في مايسمى بالجال قبل إجراء عملية الاختبار مرة أخرى . في هذه الحالة توجد (٥٢) طريقة مختلفة لاختبار أي ورقتين مع العناية بترتيب الاختبار ، ( ١٢ ) طريقة لاختبار ورقتين مصدوتين . وعلى ذلك فإن نسبة الاختبار ، أو كما سنسميها الاحتمال الرياضي أو الفرصة لهذا الحدث الذي وصفناه هو  $\frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$  . لقد حصلنا على النتيجة السابقة من المبادئ الأولية ، ولكن يمكننا أن نحصل عليها بطريقة أسهل إذا استخدمنا القانون العام الذي أعطيناه في نهاية الباب الثاني عشر ، وبذلك نحصل أيضاً على اختبار آخر لصفة الملائقين لث = ١ = ١ من (١١)

نسبة الاختبار مع الإعادة :

$$\frac{\frac{١}{١}}{\frac{١}{١}} = \frac{\frac{١٢}{٥٢}}{\frac{١٢}{٥٢}} = \frac{١٢}{٥٢} \div \frac{١٢}{٥٢} = \frac{١}{١}$$

نسبة الاختبار بدون الإعادة :

$$\frac{\frac{١}{١}}{\frac{١}{١}} = \frac{\frac{١٢}{٥٢}}{\frac{١٢}{٥٢}} = \frac{١٢}{٥٢} \div \frac{١٢}{٥٢} = \frac{١}{١}$$

ويكون التغير بين عدد التباديل في حالتَي الإعادة وعدم الإعادة مهما عند تعميم التعريف الذي أعطيناه لاختبار العينة إلى حالة تسجيل رمي فرد أو قطعة نقود . من الضروري أن نسمح عينة تخيلية لسلوك قطعة النقود ، أي نتيجة خمسة رميات من الضروري أن نسمح هذه العينة بالإعادة فلنضع الآن جميع التباديل المختلفة لرميتين : وجهان ، وجه يليه ظهر ، ظهر يليه وجه ، ظهوران . من بين هذه التباديل الأربعة يوجد واحد فقط يتفق مع الشرط بأن كليهما وجه وعلى ذلك نقول أن الاحتمال الرياضي للحصول على وجهين في رمية مزدوجة هو  $\frac{١}{٤}$  وعند تقرير ذلك يجب أن نتذكر أن القيمة العملية لأي نتيجة يحصل عليها من مثل هذه العملة نفترض من قبل إجرائها معلومات خارج نطاق الرابضة ، وهي في حالتنا هذه أن تركيب قطعة النقود يتفق مع تساوي الفرصة لكل من الوجه والظهر لأن يردوجا في الرميات المتتالية ( شكل ١٩٢ )

ويكون الفرق بين نتيجة الاختبار مع الإعادة وبدونها بسيطاً للنسبة في بعض الحسابات إذا فرضنا عشرة مجموعات من ورق اللعب ، فإن النسبة بين الأوراق المنصورة إلى عدد الأوراق الكلية سنستل ١٢ : ٥٢ أو ٣ : ١٣ . واليكى الاحتمال الرياضي لاختبار ورقتين مصدوتين بدون إعادة ستكون

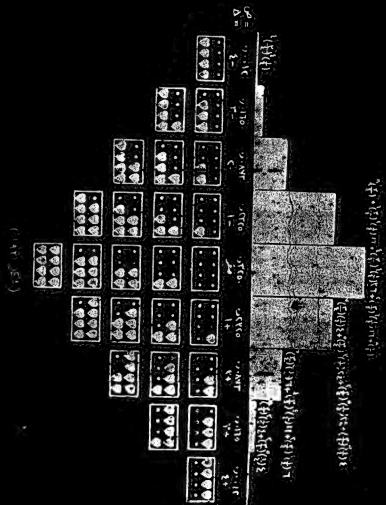
$\frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$  ، وعلى ذلك إذا النسبة تختلف اختلافاً بسيطاً عن  $\frac{١٢}{٥٢} = \frac{٣}{١٣}$  . وعلى ذلك إذا أخذنا عينة من جال كبير جداً ، لا هم إذا كان الاختبار مع الإعادة أو بدونها وهذا الكلام مقبول ، وذلك لأن أخذ العينة لا يغير تركيب الجال تغيراً ملحوظاً إذا كان هذا الجال كبيراً جداً . وفي الإحصاء العملي ، تكون هذه هي الجال في أغلب الأحيان ، وذلك من جهة الحفظ لأن الرابضة التي تندرج في الاختبار مع الإعادة هي أبسط بعض الشيء عنها في الحالة الأخرى . وهذا هو السبب

الذى من أجله تعطى كتب الإحصاء الدرايسية أمثلة روى النقود والبرد كأمثلة على اختبار لا يتخوى فعلا على الإعادة .

ومن الجائز أن تبدأ دراسة علم الوراثة وتحصل على نتائج مفيدة ، إذا اقترنا تساوى الفرصة في التعليم . ومن المؤكد أنه يمكننا أن نسلك طريقاً مباشراً إلى القوانين الأساسية للاختلال الرياضى إذا حاولنا الإفادة من لوحة الشطرنج وذلك لتوضيح نتائج تساوى الفرصة في إحدى لعب الخبط ، وبالتالي — في مرحلة أخرى — لتوضيح الأخطار الفعلية التي تتورط فيها الحكومة إذا هي تعرضت على أساس فروض معينة عن الأخطار التي يمكنها أن تواجهها . والسبب الذي ذكرناه في الفقرة السابقة ، يقوم بدراسة ذلك أولاً على أساس أن عدد الموارث التي قد تحدث كبير جداً ، أو بمعنى آخر ، أن نوع الأخطار التي قد تعرض لها الحكومة يمكن مقارنتها بالأخطار في حالة رمى قطعة نقود .

ولكن نحسن حالتنا النفسية قبل أن نستمع في هذه الدراسة ، ولتوضيح الأمور التي تتضمنها إحدى أنواع النتائج التي نحاول الإحصاء — بوجهها — تتوقف كثير من أحكامنا في الحياة على أدلة غير قاطعة تماماً . وقد نرغب مثلاً في معرفة ما إذا كان أحد أنواع الطعام ذا أثر فعال ، أو ما إذا كانت هناك أى قواعد حقيقية لما يدعيه بعض الدجالون الشعبيون من أن الأطنيبال يشعرون بحرارة أكبر من الكبار . في كل حالة من الحالات السابقة قد يكون النتائج مجرد مبدعة . وهو اهتمام الإحصاء الحديث هو على الخصوص تقرير ما هي الحقيقة ؟

لا توجد إجابة حاسمة لهذا السؤال ، ولكن لا يوجد أفضل من أن نقبس هنا ما كتبه المداصر من ١ . فيشر ، إذا كنا نود أن نعطي إجابة محددة غير نهائية . تسعى سيده ( يفتنم فيعمل ذلك ) أنها تستطيع أن تعرف إذا كانت هفتها قد وضعت اللين قبل أو بعد الشاى وذلك بأن ترتشف الشاى المزوج باللين . ولكن ثبت إمكاناتها معرفة ذلك تبدي استبعادها للتعبير بين ثمانية فلانجيل من الشاى ومن اللين في أربعة منها . قبل اللين والعكس بالنسبة للربعة الآخرين . الثمانية فلانجيل مقسوبة تماماً فيما عدا ذلك وهي تبدي









والفشل كما في حالة ثمانية رميات لقطعة نقود متطابقة السطحين . في هذه الحالة توجد ٢٠ ترتيبات مختلفة . وعلى ذلك ففرصة النجاح ثمانية مرات متوالية محسوبة على حسنة الأشخاص هي ١/٢٠٠٠ . وعلى ذلك يكون احتمال النجاح إلى احتمال الفشل هو ١/٢٠٠٠ . إذا كانت السيدة لا تعلم عدد فباجيل كل نوع .

ويعتبر بالنسبة للفرق الجديد على موضوع الفقرات السابقة ، أن يقف هنا ويحاول فهم الاحتمال الرياضي في كل احتمال مما يأتي في حالة السحب مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة :

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

الجواب ٢٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

١٠

(الاجواب ۶۲)

(الموافق ١٣/١)

(الجواب ٢٣)

( ∴ ∴ ! )

(...)

(continued)

2

(2000) 1821-1828

(جواب: ۱۱)

المجواب ٣٢

ای



2

—

1

2.



عدد من ۲۰۰

من إسمو:



19

100

$$z_1 \geq \dots \geq z_n \geq 0$$

—

•

□ □ □ □

\_\_\_\_\_

وروه حمراء سديها

عشرة جمراء أو

[illegible]

ويعبر بـ ورق القلب المظاظ لهذه النجاسة هو أربعة أوراق خمر وأربعة  
أوراق حمراء، تتكون ثمانية أوراق مرتبة في ترتيب معين لا يتوقف  
عنده جميع الترتيبات الممكنة الثمانية أوراق ذات الترتيب

٥٩٦

41

وعلى ذلك فالترتيب الصحيح هو واحد في السبعين ، وفرضه الخيار هنا  
الترتيب في ١٠٠. وعلى ذلك فتكرر أن هذه التجربة عدداً كبيراً من المرات ،  
يستطيع شخص أن يمين الترتيب الصحيح مرة كل سبعين مرة وذلك بشرط  
تنظيف المجموعة جيداً في كل مرة . وعلى ذلك نقول أن النسبة بين فرضه  
الخيار الترتيب المطلوب وبين فرضه عدم الخيار هي ١ : ٦٩ في كل محاولة ،  
وعلى ذلك لا يوجد أي أساس لإدعاء البسطة . ولكن ذلك سيأخذ في ألا  
ننته وما تقوم به ، ليست هذه مسألة رياضية . ولكن ينبغي للكثيرين على  
النتيجة للنتيجة . دراسة لهذه عدة أمثلة أخرى .

وعلى ذلك فقل بغير موضع كيف يمكننا أن نلج من سلوك التودج معين متبهماً يقاس عليه — لاختيار الارتباط بين مجموعتين من الظواهر، وفي حالنا هذه هما الحكم الشخصي لأحد الأفراد على حالة، والحالة نفسها. وهو أيضاً نفقت نظرنا إلى ضرورة اختيار التودج المناسب. بإحاطة البينة علماً بوجود أربعة فئات من كل نوع، نكون في الواقع قد قيدنا اختيارها. ونشأ مسألة أخرى إذا نحن لم نخط البينة علماً بأن نصف المجموعة من نوع ونصف الآخر من نوع آخر. يمكننا في هذه الحالة الأخيرة إذن أن نغير العديد من كل فئتين كمك على عينة نريد يتولى على الإجابات التجارب



والفعل كذا في حالة غلبة رميات لقطة فتود مضابقة السطحين . في هذه الحالة توجد ٢ ترتيبات مختلفة . وعلى ذلك ففرصة النجاح ثمانية مرات متوالة محسوبة على هذا الأساس هي  $\frac{1}{2^6}$  . وعلى ذلك يكون احتمال النجاح إلى احتمال الفشل هو  $\frac{1}{255}$  ، إذا كانت السيدة لا تعلم عدد فناجيل كل نوع .

وبحسب المسألة للفرق الجديد على موضوع الفقرات السابقة : أن نفتق هذا وجعلنا ترتيب الاحتمال الرياضي في كل اختيار بما أن في حالة الصحيح مرة واحدة من مجموعة ورق لعب كاملة .

الجواب (٦)

الجواب (٦)

الجواب (٦)

(٦ ~ ~)

ورقة ملكة (ملك أو ملك)

.....

(٦ ~ ~)

.....

(٦ ~ ~)

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

استبعادها أبداً لأن تبدو في التأي الموجود في هذه الفناجيل حسب أي ترتيب يراه الممتحن ، ولا تنافي أي معلومات أخرى خلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سنفترض أن هذه السيدة تعين نوع كل فنجال تعيناً صحيحاً . علينا الآن أن نقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً . وبمعنى آخر . هل لهذه النتيجة أساس ؟

وإذا خرج ورق اللب الملاحظ لهذه التجربة هو : أربعة أوزان جرماء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة في ترتيب معين لا يتوقف

لا على اللون

(نص ٥٩٦) هو

.....

وعلى ذلك فالترتيب الصحيح هو واحد في السبعين ، وفرصة اختيار هذا للترتيب هي  $\frac{1}{70}$  . وعلى ذلك فتكرار هذه التجربة عدداً كبيراً من المرات ، يستطيع شخص أن يميز الترتيب الصحيح مرة كل سبعين مرة وذلك بشرط تثبيت المجموعة جيداً في كل مرة . وعلى ذلك نقول أن البنية بين فرصة اختيار الترتيب المطلوب وبين فرصة عدم اختياره هي ٦٩ : ١ في كل محاولة ، وعلى ذلك لا يوجد أي أساس لادعاء السيدة . هل يكون ذلك سبباً في ألا تقع وبما تقر به ؟ ليست هذه مسألة رياضية ، ولكن يستحق الكثيرون على أن هذه النتيجة تقرر دراسة الموضوع دراسة أعمق .

وعلى ذلك فنال وبشر بوضع كيف يمكننا أن نخد من سلوك أمودج معين متباسباً يقاس عليه — لاختيار الارتباط بين مجموعتين من الظواهر ، وفي حالتها هذه هما الحكم الشخصي لأحد الأفراد على حالة ، والحالة نفسها . وهو أيضاً قلقت نظرنا إلى ضرورة اختيار النموذج المناسب . بإحاطة السيدة علينا بوجود أربعة فناجيل من كل نوع ، تكون في الواقع قد قيدنا اختيارها . وتنشأ مسألة أخرى إذا نحن لم نخط السيدة علماً بأن نصف المجموعة من نوع ونصفها الآخر من نوع آخر . يمكننا في هذه الحالة الأخيرة إذن أن نغير تحديد نوع كل فنجال كحكم على عنه بتردية يمتدح على احتمالات النجاح

$\langle \dots \rangle$  ، ولا يتبقى أي معلومات أخرى بخلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سوف نرى أن هذه السيدة تعين نوع كل فيجال تمييزاً صحيحاً ، وعليها الآن أن تقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً ، وبمعنى آخر ، هل لهذه النتيجة أساس ؟

ونودج ورق اللعب المماثل لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة في ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون . عديد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

٨٨

$$V = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

$\langle \dots \rangle$  ، ولا يتبقى أي معلومات أخرى بخلاف أن أربعة فناجيل من نوع ، والأربعة الأخرى من النوع الآخر . سوف نرى أن هذه السيدة تعين نوع كل فيجال تمييزاً صحيحاً ، وعليها الآن أن تقرر على ضوء هذه النتيجة ما إذا كان ادعاء السيدة صحيحاً ، وبمعنى آخر ، هل لهذه النتيجة أساس ؟

ونودج ورق اللعب المماثل لهذه التجربة هو : أربعة أوراق حمراء وأربعة أوراق أخرى سوداء تكون ثمانية أوراق مرتبة في ترتيب معين لا يتوقف إلا على اللون . عديد جميع الترتيبات الممكنة للثمانية أوراق ذات اللونين

الجواب ٣٠

الجواب ٣١

الجواب ٣٢

الجواب ٣٣

الجواب ٣٤

الجواب ٣٥

الجواب ٣٦

الجواب ٣٧

الجواب ٣٨

لا نستطيع

الجواب ٣٩

الجواب ٤٠

ورقة ملوكة (ملوكة أو ملوكة)

ورقة ملوكة أو ملوكة

ورقة سوداء أو ورقة ملوكة

: ..... &lt; &gt;

1 ~ . 1 ~

~ ! ~

: ..... &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;

~ &lt; &gt;



هي: إذا كان اختياران أو أكثر غير متداخلين على الإطلاق فإن احتمال الحصول على أيهما أو الآخر يساوي مجموع الاحتمالات المفردة.

افترض عينة ثنائية تتكون من آس أحمر وملك. وعلى ذلك فعدد الأوراق الممكنة هي ٢ آس ٤ ٦ ملك. إذا أعدنا الورقة الأولى المسحوبة ونبطأ قبل سحب ورقة أخرى، فإن فرصة الحصول على مثل هذه العينة هي  $\frac{1}{2}$  أو  $\frac{1}{4}$ . فرصة اختيار آس أحمر هي  $\frac{1}{2}$ ، وفرصة اختيار ملك هي  $\frac{1}{2}$ ، والقاعدة التي ذكرناها تنص على أن فرصة اختيار إما آس أحمر أو ملك من أي نوع هي:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

وهذه القاعدة تنسرى على أي عدد من الاختيارات ما دامت مستقلة، فمثلاً يمكننا تعدد الاختيار في المثال السابق حسب نسبة إمكان الحصول على كل ورقة على الترتيب كالآتي:

$\frac{1}{2}$	آس واحد كروية
$\frac{1}{2}$	آس واحد ديناري
$\frac{1}{2}$	ملك إسباني
$\frac{1}{2}$	ملك ديناري
$\frac{1}{2}$	ملك بسطوني
$\frac{1}{2}$	ملك كروية

ونطبق قاعدة الجمع نجد أن فرصة سحب واحد مكون إما من آس أحمر أو ملك هي ٦

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

وفيما يلي بعض الأمثلة البسيطة، يمكن للقارئ أن يختبر صحة القاعدة بها:

(١) نبتري بلة على ثلاث كرات زرقاء وخمس كرات حمراء وأربعة كرات خضراء، وكرتان سوداوين

أوجد فرصة سحب كرة واحدة كالآتي:

- (١) كرة زرقاء أو حمراء. (الجواب  $\frac{1}{3}$ )  
 (٢) كرة إما زرقاء أو خضراء. (الجواب  $\frac{1}{2}$ )  
 (٣) كرة ملونة. (الجواب  $\frac{2}{3}$ )  
 (٤) كرة إما زرقاء أو سوداء. (الجواب  $\frac{1}{3}$ )

(ب) البيت فرد أو بنت أرجح من، واحدة، ماضى فرصة أن يكون بنتاً بالنظر على الترتيب الأعلى:

- (٥) أما واحدة أو بنت. (الجواب  $\frac{1}{2}$ )  
 (٦) عدد زوجي. (الجواب  $\frac{1}{2}$ )  
 (٧) أقل من ٣. (الجواب  $\frac{1}{2}$ )  
 (٨) أقل من ٥. (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

قاعدة الضرب:

يمكننا أن تصور إمكانيات محتمل آس باليد اليمنى واليد اليسرى من مجموعتين متطابقتين من ورق اللعب، أو (وهو نفس الشيء) محتمل من نفس المجموعة مع إعادة الورقة الأولى قبل سحب الثانية، يمكننا أن تصور ذلك بالرجوع إلى ورقة الشطرنج وذلك لتوضيح ما يضمنه تساوي الفرصة ونفس الطريقة يمكن توضيح نتيجة سحب ورقة واحدة آساً من كل من مجموعتين من ورق اللعب تركبها مختلف كراتي مثلاً ١٩٣١ و١٩٣٢ المجموعتين في شكل ١٩٣١ هو كالآتي:

المجموعة اليمنى (٤)	المجموعة اليسرى (٥)
الآس الإسباني	الآس الإسباني
الاثنتين الإسباني	الاثنتين الإسباني
الثلاثة الإسباني	الآس البسطوني
الآس البسطوني	الاثنتين البسطوني
.....	الثلاثة البسطوني





توجد ٢٠ (= ٢٠) تبادل زوجية أي ٢٠ إمكانيات تتفق مع تساوى الفرصة

- |                                     |                                     |
|-------------------------------------|-------------------------------------|
| ١. الآس الإسياني مرتين              | ١. الآس الإسياني واللاتين الإسياني  |
| ٢. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٢. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٣. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٣. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٤. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٤. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٥. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٥. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٦. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٦. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٧. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٧. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٨. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٨. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ٩. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  | ٩. الآس الإسياني واللاتين البسطوني  |
| ١٠. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٠. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١١. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١١. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٢. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٢. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٣. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٣. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٤. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٤. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٥. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٥. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٦. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٦. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٧. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٧. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٨. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٨. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ١٩. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ١٩. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |
| ٢٠. الآس الإسياني واللاتين البسطوني | ٢٠. الآس الإسياني واللاتين البسطوني |

المجموع

١١

المجموع

من هذا الجدول يمكننا أن نستخلص المعلومات الآتية الخاصة بالازواج التي من نفس النوع

- |                                   |                                     |
|-----------------------------------|-------------------------------------|
| ١. ورقتان سياتي                   | ٢. ورقتان بسطوني                    |
| ١. الآس السياتي مرتان             | ١. الآس البسطوني مرتان              |
| ٢. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٢. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٣. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٣. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٤. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٤. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٥. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٥. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٦. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٦. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٧. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٧. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٨. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٨. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ٩. الآس السياتي واللاتين السياتي  | ٩. الآس البسطوني واللاتين البسطوني  |
| ١٠. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٠. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١١. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١١. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٢. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٢. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٣. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٣. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٤. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٤. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٥. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٥. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٦. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٦. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٧. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٧. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٨. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٨. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ١٩. الآس السياتي واللاتين السياتي | ١٩. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |
| ٢٠. الآس السياتي واللاتين السياتي | ٢٠. الآس البسطوني واللاتين البسطوني |

المجموع

٦

٣

وعلى ذلك فإن  $6 + 3 = 9$  إمكانيات لسحب ورقتين سياتي أو ورقتين بسطوني، والباقي  $20 - 9 = 11$  تكون الورقتان فيه واحدة سياتي والأخرى بسطوني. وعلى ذلك فإن الاحتمال الرياضي لاختصار عتبة من كل من هذه الأنواع الثلاثة هو



## قاعدة الطرح:

إذا كان لدينا الأكمات بالنسبة أى للفرص تماماً ، فإن مجموعها الكلى لا بد وأن يساوى الوحدة كما فى المثال الذى أعطيناه فيما سبق ألا وهو:

$$\text{ورقتان سياتى} + \text{ورقتان بسطونى} + \text{سياتى وبسطونى المجموع} \\ = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

إذا فضلنا الاختيار على أنه بطريقتين على حسب ما إذا كان يتصف أولاً بتصف بصفة معينة ، فإن الاحتمال ن لأن يتصف بهذه الصفة ، والاحتمال أن لا يتصف بها يكون مجموعهما الوحدة ، أى  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$  . وعلى ذلك

$$0 = 1 - \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = 1 - 0$$

فتلنا ، فرصتا الحصول ، وعدم الحصول ، على ورقة ملكية حرام فى سحب واحد من مجموعة كاملة من ورق اللعب مما على الترتيب  $\frac{1}{2}$  ،  $(1 - \frac{1}{2})$   $= \frac{1}{2}$  ، أو  $\frac{1}{2}$  ،  $\frac{1}{2}$  . وفى كثير من الأحيان تختصر العمل كثيراً عند حل مسائل الاحتمال باستخدام قاعدة الطرح هذه ، وعلى الخصوص تطهر فائدة هذه "قاعدة عندما يكون المطلوب فى المسألة هو تعيين فرصة الحصول على الأقل على اختيار واحد من نوع معين كفى السؤال التالى ما هى فرصة الحصول على الأقل على ورقة حرام واحدة فى سحب واحد من كل من مجموعتين كاملتين من ورق اللعب ؟

والجولة إلى يجب فهمها هنا هى أنه يجب إبقاء عدم الحصول على أى ورقة حرام فى السحب المزدوج ، أو على الأقل على ورقة حرام واحدة ، وبمعنى آخر أن السحب المزدوج تماماً . وعلى ذلك فإن الفرصتين التاليتين تناظران هذين النوعين من الاختيار يجب أن يكون مجموعهما الوحدة . والآن فرصة كون الورقة سوداء فى سحب واحد من مجموعة واحدة هى  $\frac{1}{2}$  . وهى طبعاً نفس فرصة عدم كونها حرام . الفرصة من إتمام الورقتين فى سحب آتى من مجموعتين كاملتين ، كى أكونتا سوداوين هى ( باستخدام قاعدة الضرب )

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

بالمثل فرصة الحصول على ورقتين بسطونى  $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2})$  هى حاصل ضرب فرصة  $(\frac{1}{2})$  الحصول على ورقة بسطونى من المجموعة التى فى فرصة  $(\frac{1}{2})$  الحصول على ورقة بسطونى من المجموعة اليسرى . والسحب المزدوج مختلفتين فى النوع يدخل هنا قاعدة إما ... أو ( قاعدة الجمع ) . فى هذه الحالة لدينا إكيتين مستقلتين ، أما يمكن سياتى ويسار بسطونى أو يسار سياتى ويمين بسطونى . حسب قاعدة الضرب ، هاتان الفرصتان هما  $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$  .  $(\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$  . والمجموع هو  $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$  .

وقد يساعد القارئ هنا تكون جداول مشابهة للجداول السابق للمجموعات الغير الكاملة ( ١ - ١٠ ) الآتية من ورق اللعب وجميعها من نفس النوع . هذه الجداول تعطى جميع المعلومات اللازمة لاختيار صحة قاعدة الجمع والضرب . وذلك بحساب فرصة الحصول على حبة مكونة من ورقتين من نوع أو آخر بما يأتى ( من ١ - ٥ ) :

(١) آسین

(ب) ورقتين من نفس القيمة غير آسین

(ج) ورقتين مختلفتين

(د) ورقتين من نفس القيمة وتكون هذه القيمة زوجية

(١) بین آس ٤٣٢

(٦) بین آس ٢

يسار آس ٤٣٢

يسار آس ٤٣٢

(٢) بین آس ٢

(٧) بین آس ٦٥٤٣٢

يسار آس ٥٤٣٢

يسار آس ٤٣٢

(٣) بین آس ٤٣٢

(٨) بین آس ٥٤٣٢

يسار آس ٣٢

يسار آس ٥٤٣٢

(٤) بین آس ٣٢

(٩) بین آس ٤٣٢

يسار آس ٣٢

يسار آس ٦٥٤٣٢

(٥) بین آس ٥٤٣٢

(١٠) بین آس ٦٥٤٣٢

يسار آس ٤٣٢

(١١) يسار آس ٦٥٤٣٢

وعلى ذلك فالإمكان النسبي لك، كي لا تكون الورقتان سوداوين معا هو  
 $1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

وحيث أن شرط عدم كون الورقتين سوداوين معاً يكافئ الشرط بأن  
 أحدهما تكون جراء، يكون هذا هو الجواب المطلوب.

وبماوى ذلك في البساطة، الإجابة على السؤال ما هي فرصة الحصول على  
 ورقة كوبة واحدة على الأقل إذا كان السحب بشكر تجزئية مرات ومع  
 الإعادة؟ حبيب قاعدة الضرب تكون فرصة الحصول على ثمانية أوراق من  
 نوع غير الكوبة هي  $(\frac{1}{2})^6$ . وعلى ذلك فرصة الحصول على ورقة كوبة  
 واحدة هي

$$1 - (\frac{1}{2})^6 = 1 - \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال الحصول على ورقة واحدة كوبة على الأقل  
 برصيد الحصول على أوراق كوبة على الإغلاق هي  $63:64$  أو  $100:101$  تقريباً.

والفرصة التي أتاحت المنافسة لمشورة بين باسكال وبريمت بعض مثالا  
 لقاعدة التي أعطيها للناسل التي تجوز العبارة على الأقل واحدة، فقد  
 يكون الفارس دى مير مرة من الزمان بنسبة أعلى من ١١١ تقبل على الحصول  
 على العدد ستة مرة واحدة على الأقل في أربعة رميات لرد، ويجوز هذه البروة  
 بأرمان على الحصول على عدد مرتين في ٢٤ رمية مزدوجة، وقاعدة الطرح  
 تعطي التفسير.

فرصة الحصول على العدد ستة مرة واحدة على الأقل في أربعة رميات:  
 $1 - (\frac{1}{6})^4 = 0.9776$  (الفرصة أفضل للحصول على المطلوب).  
 فرصة الحصول على عدد مرتين في ٢٤ رمية مزدوجة  
 $1 - (\frac{1}{6})^{24} = 0.491$  (فرصة عدم حدوث المطلوب أكبر)  
 الألفاظ الآتية يتطلب حلها قاعدة الطرح

(١) في سحب آلى من يمدو على الورق في شكل ١٩٣٠ ما هي فرصة  
 الحصول على ورقة بسطوط على الأقل (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٢) في المثال السابق ما هي فرصة الحصول على آس واحد على الأقل؟  
 (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٣) في المثال (١) ما هي فرصة الحصول على ورقة واحدة على الأقل  
 تكون قيمتها أقل من ٦؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٤) في نفس المثال رقم ١ ما هي فرصة الحصول على ورقة سوداواحدة  
 على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٥) في رمية آتية بدون ما هي فرصة اجتياز أحد الأوجه المقابلة على  
 الأقل على ثلاثة نقاط على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{8}$ )

(٦) في المثال ٥ ما هي فرصة اجتياز أحد الأوجه المقابلة على الأقل على  
 أربعة نقاط على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{8}$ )

(٧) لثلاث تجزئ كل منهما على ثلاث أكواب صفر ١٠٠ و ١٠٠ ورقة ٥٠ جراء ٦٠  
 جبراء ١٠٠ ورقة سوداوين، في سحب آلى ما هي فرصة الحصول على كورة  
 سوداواحدة على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٨) في تجزئ السابق ما هي فرصة الحصول على كورة خضراء واحدة على  
 الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(٩) في المثال السابق ما هي فرصة الحصول على كورة سوداواحدة أو كورة  
 خضراء واحدة على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

(١٠) في المثال السابق ما هي فرصة الحصول على كورة زرقاء واحدة أو  
 كورة سوداواحدة على الأقل؟ (الجواب  $\frac{1}{2}$ )

### معى الاستقلال

في كثير من الأحيان تصاغ قاعدة الضرب على النحو الآتي: احتمال حدوث  
 حادثين مستقلين أو أكثر معاً يساوى حاصل ضرب الاحتمالات المنفردة  
 لحدوث كل منهم. أهم أهمية في هذه العبارة هي كلمة «مستقلين» فالحجب

الآتي من مجموعتين من ورق اللعب ، أو الرمي الآتي للترديد ، والرمي المتتابع لنفس البرد هي حوادث مستقلة . وليس من الضروري أن يكون ذلك صحيحاً في حالة السحب المتتالي من نفس المجموعة من ورق اللعب . أما النتيجة رمية نفس البرد مرة ثانية فلا تتوقف على ما حدث في الرمية الأولى ، وذلك لأن عيبه أو وجه البرد يبقى بدون تغيير ، ولا يكون نفس الشيء صحيحاً في حالة مجموعة ورق اللعب إلا إذا أعيدت الورقة المسحوبة قبل سحب غيرها . وهذه العبارة لا تكون صحيحة في حالة سحب ورقتين في آن واحد .

وعلى ذلك سندرس الآن تطبيق القواعد الثلاث الأساسية في حالة العبات التي لا يسمح فيها بالأعادة . نفرض أن المجموعة تحتوي على ثمانية بوعها كالآتي : ١. بسطوني ، ٣ كوبة ، ٤ ديناري . ولنطلق على هذه المجموعة ( في حالة تكونها الابتدائي ) المجموعة ١ . إذا سحبنا ورقة منها فيما أن تكون هذه الورقة بسطوني أو كوبة أو ديناري . وعلى ذلك يبقى لدينا مجموعتان واحدة من المجموعات الثلاث الآتية التي يتكون كل منها من سبع ورقات :

بسطوني	كوبة	ديناري
ب	٣	٤
ج	٢	٤
د	١	٣

وعلى ذلك فاحتمالات سحب ورقة بسطوني فأخرى كوبة فتعادل ديناري من المجموعة الأصلية ( ١ ) والمجموعات التي تبقى ( ب ٦ ج ٤ د ٣ ) هي

بسطوني	كوبة	ديناري
١	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$
ب	٠	$\frac{3}{4}$
ج	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{4}$
د	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{4}$

وعلى ذلك يمكننا اعتبار مسألة سحب ورقتين بدون إعادة من وجهة نظر مختلفة ، ألا وهي اختيار ورقة من المجموعة ( ١ ) باليد اليمنى واختيار ورقة ثانية من مجموعة أخرى ( ب ٦ ج ٤ د ٣ ) باليد اليسرى . يمكننا أن نعتبر الورقة التي نسحبها من المجموعة ( ١ ) على أنها تذكرتنا بتعصيب . تعطينا الحق في سحب ورقة أخرى من المجموعات ب ٦ ج ٤ د ٣ ، ويتكون كل من هذه المجموعات ثابت . وعلى ذلك فسحب ورقة بسطوني . ونحسب نسبة هذه كوبه من نفس المجموعة ، بدون إعادة الورقة الأولى ، يكفي في الواقع جاذبي اختيار مستقلين استقلالاً حقيقياً

( ١ ) اختيار ورقة بسطوني من ١

( ٢ ) اختيار ورقة كوبة من ب

وعلى ذلك يمكننا تطبيق قاعدة الضرب للحوادث المستقلة . ففرصتنا بكل من ( ١ ) ٦ ( ٢ ) هما على الترتيب  $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3}$  . وعلى ذلك ففرصة اختيار الورقتين معاً هي  $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$  من ذلك نستطيع أن نعين جميع احتمالات الاختيار ورقتين :

بسطوني وبسطوني	بسطوني وكوبة	بسطوني وديناري
كوبة وبسطوني	كوبة وكوبة	كوبة وديناري
ديناري وبسطوني	ديناري وكوبة	ديناري وديناري

ويمكننا أيضاً أن نبوب النتيجة النهائية باستخدام قاعدة الجمع للاختيار المتبادل وقاعدة الطرح في حالة وجود الشرط ، واحد على الأقل ، فمثلاً

$$\text{احتمال سحب ورقتين من نفس النوع} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

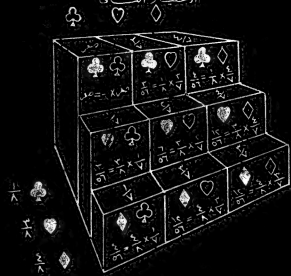
$$\text{احتمال سحب ورقتين مختلفتين النوع} = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

كما يمكننا أيضاً أن نفصل النتائج على أساس نوع الاختيار الثاني كما يأتي

$$\text{بسطوني} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

$$\text{كوبة} = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

## الاحتمال المبني



## الاحتمال المشترك

♣♣♣	♣♣♥	♣♣♦	♣♥♥	♣♥♦	♣♦♦	♥♥♥	♥♥♦	♥♦♦	♦♦♦
1/27	2/27	2/27	2/27	4/27	4/27	1/27	2/27	2/27	1/27
مربع	مربع	مربع	مربع	مربع	مربع	مربع	مربع	مربع	مربع

## الاحتمال البسيط

$$\frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{4}{27} + \frac{4}{27} + \frac{1}{27} + \frac{2}{27} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} = 1$$

(نظرية الاحتمال)

نظرية الاحتمال البسيط (نظرية الاحتمال)

وناستخدم نموذج مثل المجداف، شكلاً ١٩٦، يمكننا أن نتجنب الخطأ  
بالإعتماد على حساب الفرصة للاختيار العشوائي بدون إعادة، ولكن يمكننا

أيضاً الحصول على نفس النتائج باستخدام القانون العام الذي وجدناه . جميع  
النتائج الممكنة لورقتين من ثمانية أوراق هي :

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

نطبق القانون العام ، يجب أن نتذكر أن من  $٥٦ = ٧ \times ٨$  عدد ما يتكون  
من ٧ ورقتين

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

يطلبنا للحصول على النتائج الآتية :

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

$$٥٦ = ٧ \times ٨ = {}^{(١)}٨ = ٧$$

يمكن للقارئ أن يتكلم هذه النتائج كعشرين مفيد ، ثم يستخدم كلام من  
القانون العام ، ونموذج السلم للهصول على فرصة يجب مردوح بدون إعادة  
من نفس المجموعة في كل من الحالات الآتية :

١ - ورقتين بياني من مجموعة تتكون من ورقة كوبه وثلاث ورقات  
سبكي ( الجواب ٧ )

٢ - ورقة سبائي وأخرى دينارى من مجموعة تتكون من ورقين كوبه وثلاث ورقات سبائي وورقة واحدة دينارى (الجواب  $\frac{1}{2}$ ).

٣ - ورقتان دينارى من مجموعة تتكون من ثلاثة أوراق كوبه وأربعة ورقات سبائي وورقتين دينارى وورقة بسطونى (الجواب  $\frac{1}{4}$ ).

٤ - ورقة كوبه وورقة سبائي من مجموعة تتكون من ورقة كوبه وورقتين سبائي وثلاث ورقات كوبه (الجواب  $\frac{1}{2}$ ).

٥ - ورقتان بسطونى من مجموعة مكونة من ورقتين سبائي وثلاث ورقات دينارى وأربع ورقات بسطونى (الجواب  $\frac{1}{4}$ ).

٦ - ورقة جمرأ وورقة سوداء من مجموعة مكونة من ورقتين كوبه وثلاث ورقات سبائي (الجواب  $\frac{1}{2}$ ).

٧ - ورقتان لونهما أحمر من مجموعة مكونة من أربع ورقات بسطونى وثلاث ورقات كوبه وورقة واحدة دينارى (الجواب  $\frac{1}{4}$ ).

(٨) كارتان لونهما أسود من مجموعة مكونة من ورقتين سبائي وثلاثة بسطونى وأربعة ورقات كوبه (الجواب  $\frac{1}{8}$ ).

(٩) ورقة جمرأ وأخرى سوداء من مجموعة مكونة من ورقة سبائي وورقة بسطونى وثلاثة ورقات دينارى (الجواب  $\frac{1}{2}$ ).

(١٠) ورقة جمرأ وأخرى سوداء من مجموعة مكونة من ورقتين دينارى وخمسة ورقات دينارى (الجواب  $\frac{1}{2}$ ).

التوزيع ذى الخدين :

إذا رميّا قطعة نقود مرتين ، فإنه يمكننا أن نساب الاحتمالات المختلفة (شكل ١٩٢) كما يأتى :

النتيجة	ظهران	ظهر ووجه	وجهان
الفرصة	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

وإذا كنا نرصد النتيجة كالتالى :

١ الوجه ٢ صفر الظاهر فإن الرصيد يكون كالتالى :

الرصيد	١	٢
الفرصة	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

ويمكن استنتاج ذلك من شكل ١٩٣. إذا كان تقسيم قطعة النقود يسبب بغيران قانون تساوى الفرصة ، وهذه النتيجة تتفق مع القواعد الاحتمالية المتعارفة :

$$\begin{array}{ccccccc} \text{ظ} & \text{ظ} & \text{ظ} & \text{و} & \text{و} & \text{و} & \text{ظ} \\ \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} \end{array}$$

نلاحظ هنا أن الاحتمالات الثلاث السابقة هى الحدود المتتالية في مفكوك ذى الخدين  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}) \times (\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2})^2$  ، وفي حالة رمي القطعة ثلاث مرات يحصل على نتيجة مشابهة :

الرصيد	١	٢	٣
النتيجة	ظظظظ	ظظظو	ظظوو
الفرصة	$(\frac{1}{4})^3$	$3 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2}$	$3 \times (\frac{1}{4})^2 \times \frac{1}{2}$

مرة أخرى نحصل على الحدود المتتالية في مفكوك ذى الخدين  $(\frac{1}{2} + \frac{1}{2})^3$  ، والتطبيق المثالى للفرصة بقسمة المعطاة في شكل ١٩٧ بين قانونا علما حالة الخدين عنه بدون إعادة ، إذا كان الرصيد نتائج النجاح في محاولتين متتاليتين هو ١٦٠ ٦٤ ٢٠ ٥ ورمونا إلى احتمال النجاح في محاولة واحدة بالرمز  $n$  ولاحتساب الفشل بالرمز  $k = (n - 1)$  فإن احتمالات الحصول على نقط عددها ١٦٠ ٦٤ ٢٠ ٥ هى الحدود المتتالية في مفكوك ذى الخدين

(ن + ك)  $\frac{1}{2}$  أى أن :

عدد مرات النجاح ١٠ ٢ ..... الخ

الفرصة	ك	ن
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

النوع  $6 = (n - 1)$  من نوع آخر  $n$  وعلى ذلك يكون التوب ناما إذا  
إذا سمع بالإعادة، فإن عدد التنظيمات الممكنة للأوراق عددها  $n$  هو  $n!$   
وعلى ذلك فعدد العيّنات الرابطة التي تحتوي على مرات نجاح عددها  $n!$   
ومرات فشل عددها  $(n - 1)!$  هو

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

وتكون نسبة عدد هذه العيّنات إلى عدد جميع العيّنات الرابطة الممكنة هي:

$$\frac{n!}{n!} = \left(\frac{n}{n}\right)$$

في هذه العبارة  $\left(\frac{n}{n}\right)$  هي النسبة  $(n, n)$  (الأوراق التي يعبر كل منها

نجاح  $n$   $\left(\frac{n}{n}\right)$  هي النسبة  $(n, n)$  (الأوراق التي يعبر كل منها فشل، وذلك لأن

الاحتمال النجاح في محاولة واحدة هو  $\left(\frac{n}{n}\right)$  وعلى ذلك ففرصة النجاح مرات

عددها  $n$  هي:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = n$$

ولكننا نعلم قبلا (الباب السابع) أن هذا هو الحد الأدنى من

الفكوك  $(n + 1)$  عندما تكون رتبة الحد الأول هي الصفر. بين شكل  
١٩٨ أنه يوجد قانون مشابه بحكم اختيار الصفات مع السماح بالإعادة. هو  
أيضا يوضح القاعدة المسماة نظرية فابريونيه أو وهي:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$ ♥	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥

المجموع  $\frac{1}{2}$  ♥

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$ ♥	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥	♥ ♥

المجموع  $\frac{1}{2}$  ♥

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$$

$\frac{1}{2}$ ♥	♥ ♥ ♥	♥ ♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥ ♥	♥ ♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥ ♥	♥ ♥ ♥
$\frac{1}{4}$ ♠ ♣ ♡	♥ ♥ ♥	♥ ♥ ♥

المجموع  $\frac{1}{2}$  ♥

(١٩٨)

النتيجة (١٩٨) هي نتيجة فابريونيه

يمكن يمكننا الحصول على هذه النتيجة مباشرة وذلك باستخدام القانون العام  
نفرض أن لدينا مجموعة من ورق اللعب عددها  $n$  منها  $l$  (نجاحات) من نفس



$$(1 + m)(l + m) = (1 + m)(l + m) \\ m(1 + m) + l(1 + m) = (1 + m)(l + m) \\ m(1 + m) + l(1 + m) = (1 + m)(l + m)$$

في حالة عدم الإعادة يمكن تلخيص قانون التوزيع الثاني في الشكل (١٩٨) وعلى ذلك تكون فرصة النجاح من المراتب شكل (١٩٨).

$$\frac{m(1 + m) + l(1 + m)}{(1 + m)(l + m)}$$

ولفرض التقرين، يمكن للقارئ أن يحاول حل المسائل الآتية؛ ما هي فرصة ما يأتي في حالة الساج بالإعادة (إذا أمكن) وبدون إعادة؟  
(١) الحصول على ٣ ٦ ٠ أو ٥ أوراق حمراء في سحب آلي واحد من كل من خمسة مجموعات كاملة من ورق اللعب؟

$$\left( \frac{36}{128} + \frac{30}{128} + \frac{1}{128} \right)$$

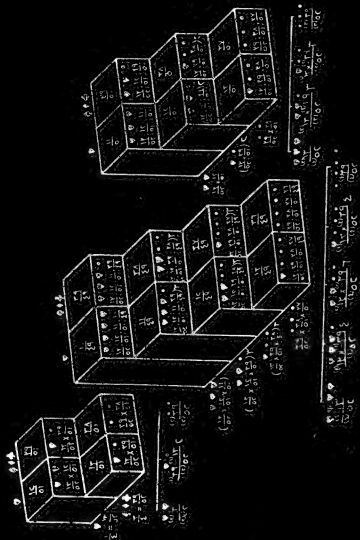
(٢) الحصول على ١ ٦ ٣ ٦ ٤ أوراق مصورة في سحب آلي من كل من خمسة مجموعات كاملة من ورق اللعب؟

$$\left( \frac{405}{371293} + \frac{60000}{371293} + \frac{100000}{371293} \right)$$

(٣) الحصول على ١ ٠ ٦ ٨ أو ١٢ ورقة مصورة في سحب آلي من كل من اثني عشر مجموعة كاملة من ورق اللعب؟

(٤) الحصول على عدد فردي من الأوراق الملكية في سحب آلي من كل من ست مجموعات كاملة من ورق اللعب؟ (الجواب  $\frac{335480}{48388}$ )

(٥) الحصول على عدد زوجي من الأسات في سحب آلي من كل من



ست مجموعات كاملة من ورق اللعب ؟  
(الجواب  $\frac{313201}{4836809}$ )

(٦) الحصول على ورقة كوبة ، ورقتين بيضاء وورقة ببطونى وثلاثة أوراق ديتارى بالسبب سبع مرات من مجموعة ورق البب كاملة بشرط أن تعاد كل ورقة من بوبه قبل سحب غيرها ؟  
(الجواب  $\frac{420}{16384}$ )

(٧) الحصول على كرتين حمراوتين وأربعة كرات سوداء فى سحب أربع من ستة ببال كل منها يحتوي على كرتة حمراء وكرتين صفراوتين وثلاث كرات حمراء وأربعة كرات زرقاء وخمسة كرات سوداء ؟  
(الجواب  $\frac{1}{1118}$ )

(٨) اختيار على كرتين صفراوتين وكرتة زرقاء وأخرى سوداء بالسحب أربع من ستة ببال كل منها يحتوي على كرتة حمراء وكرتين صفراوتين وثلاث كرات حمراء وأربعة كرات زرقاء وخمسة كرات سوداء ؟  
(الجواب  $\frac{1}{1118}$ )

(٩) الحصول على ثلاث كرات حمراء وأربعة حمراء وواحدة زرقاء بالسحب ثمانية مرات ؟  
(الجواب  $\frac{1}{1118}$ )

(١٠) الحصول على كرتين حمراوتين وثلاث كرات حمراء وخمسة كرات زرقاء بالسحب عشرة مرات ؟

### الاحتمال : علماً ورياضياً

الاحتمال الرياضى ، وهو الموضوع الذى درسناه حتى الآن هو الإمكان النسبى ، والتعريف الذى يعطيه عالم الرياضة لما هو محتمل لا يتعلق إلا بما قد حدث ، ولا يمكن تطبيقه للمعاملات الحاسية ذات القيمة العملية إلا عندما يكون تكرار الحادث فى الحياة العملية يقارب تكراره فى المسألة المدروسة . وعند إجراء التجارب الفعلية بمجموعات ورق اللعب نجد أن الحصول على توازن معينة من المجموعة بعد قطعها وبدون أن نعلم أن تقع الأوراق المختلفة . يتكرر عدد من المرات يتفق لدرجة كبيرة ، ولكن ليس تماماً ، مع الفرص

الرياضية لئلا هذه التوافق عندما يكون عدد المحاولات كبيراً جداً . وفيما يلي جدول يبين نتيجة تجربة أجريت فى معمل دراسى فى هذه التجربة يسحب كل طالب على حده ورقة واحدة من مجموعة كاملة عشرة مرات متتالية مع إعادة كل ورقة مسجوبة قبل سحب غيرها ، وعدد الطلبة عشرة . والجدول يبين نتيجة المحاولات العشرة الأولى فالمحاولات العشرين الأولى وهكذا :

عدد المحاولات	أحمر	أبيض	نسبة الأوراق الحمراء
١٠	٤	٦	٤٠٪
٢٠	٩	١١	٤٥٪
٣٠	١٤	١٦	٤٦٫٧٪
٤٠	١٩	٢١	٤٧٫٥٪
٥٠	٢٧	٢٣	٥٤٪
٦٠	٣٢	٢٨	٥٣٫٣٪
٧٠	٣٧	٣٣	٦٢٫٩٪
٨٠	٤٣	٣٧	٥٣٫٧٥٪
٩٠	٤٨	٤٢	٥٣٫٣٪
١٠٠	٥١	٤٩	٥١٫٠٪

نسبة كون الزرقة المسجوبة حمراء قريبة من النسبة ٥٠٪ الأولى . وفى بعض الأحيان أكبر قليل وفى أحيان أخرى أصغر بقليل من هذه النسبة . وفى أسفل الجدول أقرب ما يمكن لهذه القيمة ، أى أنها تكون أقرب ما يمكن منها عند ما تكون المجال أكبر ما يمكن ، أى أنه فى عدد كبير من المحاولات يقترب التكرار النسبى لاختيار ورقة معينة من الإسكان النسبى . وعندما يكون مثل هذا التناظر موجوداً ، نقول أن الاختبار عشوائى ، بمعنى أنه يحقق قانون تساوى الفرص ، ويمكن أى حسابات تجربتها خاصة بحوادث فعالية مطلقين فى ذلك قانون تساوى الفرص لا تكون صحيحة إلا على طول الزمن .

وقميا على مثال بسيط بين الارتباط بين النظرية والمسائل العملية . النسبة بين عدد المواليد الذكور والاناث تكاد تكون الوحيدة ، أي أن التكرار النسبي على طول الزمن لميلاد طفل ذكر يكاد يساوي  $\frac{1}{2}$  والتجربة تبين أن جنس المولود لا يتأثر كثيراً بجنس المولود السابق أي أنه يمكننا أن نقول أن المواليد الذكور والاناث يصلون إلى هذه الدنيا بطريقة مشابهة للأوراق الخراء والسوداء والمختلطة من مجموعات ورق مقفلة تقبضاً جيداً عند سحب ورقة واحدة من كل مجموعة على التوالي . إذا كان هذا التناظر صحيحاً فإن السؤال : مجموعة أسر البكل منها خمسة أطفال ، ما هو التكرار كون ثلاثة منهم ذكور ؟ يكافئ السؤال : ما هو الاحتمال الرياضي للحصول على ثلاثة أوراق خراء بالسحب خمسة مرات من مجموعة ورق بشرط إعادة كل ورقة قبل سحب غيرها ؟ . قانون ذي الحدين للتوزيع يعطينا الجواب

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1} = \frac{5 \times 4}{2 \times 1} = 10$$

وباستخدام قاعدة الطرح يكون احتمال عدم الحصول على ثلاثة أوراق خراء في مثل هذه المحاولة هو  $1 - \frac{10}{1024} = \frac{1014}{1024}$  . وعلى ذلك فاحتمال وجود ثلاثة أطفال ذكور من بين خمسة أطفال إلى عدمه هو  $\frac{1014}{1024}$  . إذا لم تكن نسبة ميلاد الذكور إلى ميلاد الاناث هي  $\frac{1}{2}$  لما أمكن استخدام مجموعة الورق كنموذج . نفرض أن هذه النسبة كانت  $\frac{3}{5}$  : الفرض المناسب في هذه الحالة هو أخذ عينات من مجموعة مكونة من ثلاثة أوراق كوية وأربعة بيضاء ، ويكون احتمال وجود ثلاثة أطفال ذكور في أسرة لها خمسة أطفال هو

$$\frac{5!}{3!2!} \left( \frac{3}{5} \right)^3 \left( \frac{2}{5} \right)^2 = \frac{10 \times 27 \times 4}{3125} = \frac{108}{3125}$$

يمكننا الآن أن نرى كيف يمكن لصاحب نادى الميسر أن ينظم عملياته بحيث رضى نسبة كبيرة من عملائه بأن يضعوا لنفسه رهناً ثابتاً . فإذا هو راغب

على أن يحصل على الألف على ثلاثة أوجه في ستة رميات ، فإن نسبة احتمال كسبه إلى عدمه هي  $\frac{1}{1024}$  .

فإذا كان لديه رأس مال كافٍ ليجمعه يستمر في الرهان مدة كافية فمضى ذلك أنه يهبط . جوال في المراهات ، بينما يهبط عملاقه في المراهات . وعلى ذلك فالرجل الذي يحاول أن يكسب معاً من المراهات ، مثل مراهات الثأمين التي كان يقوم بها بوليتورب في القرن السادس عشر ، يتمكن مثل هذا الرجل من كسب مئته إذا كان لديه رأس مال كافٍ في البداية . وإذا حسب المخطرة على طول الزمن حساباً صحيحاً ، إذا كانت نسبة المواليد الذكور إلى المواليد الاناث هي الواحد الصحيح فإننا نقدر أن عدداً كبيراً من المراهات مثل التي كان يجريها براردو ودومينيوتشي سيأخذه من جنياً عن كل خسارة مقدارها ٣٠ جنياً . أو ربما صواباً قدره ٦٠ . وينصح أيضاً أنه إذا كان احتمال ميلاد طفل ذكر هو  $\frac{1}{2}$  فإن احتمال خسارة رجل رأس ماله ٦٠ جنياً أكثر بكثير من احتمال خسارة رجل رأس ماله ٣٠٠٠ جنياً . وذلك لأن الرجل الأول يمكنه أن يراهن مرتين فقط واحتمال أن كلا المولودين سيكون أنثى هو  $\frac{1}{4}$  أي أنه من بين عدد كبير من الرجال الذين يملك كل منهم ٦٠ جنياً ، يراهنون بها سيقدر بهم رأس ماله جميعه . إذاً إذا كان رأس المال ٣٠٠ جنياً فمن الممكن المراهية عشرة مرات ، وبسبب احتمال كون الأطفال أنثى إلى عدده هي  $\frac{1}{1024}$  . وعلى ذلك فمن بين عدد كبير من الرجال الذين يملك كل منهم ٣٠٠ جنماً ، أقل من الواحد في الألف ، سيقدر جميع رأس ماله قبل أن يبيع رهناً واحداً رأس مال كبير يمكن الرجل أن يدخل بنفس شروط براردو ودومينيوتشي في عمليات يحتاج تعظيمها إلى مال أكبر من رأس ماله دون أن يخشى الإفلاس . وعلى ذلك فمثل رأس المال هذا ( العنكبوت ) يستمر في التوسع بينما يذلل في رؤوس الأموال الصغيرة التي تنحل في مثل هذه الجماليات ، أو على الأقل تزيد مكاناً على سلم يعقوب . ويهبط

أن يحصل الرجل على رأس مال يكفي لحايته من أي احتمال جدى للفلان  
يصح في إمكانه إخراج منافسه الصغار من التمسامل وذلك بمنح شروط  
أفضل للعمال.

النسبة الفعلية للواليد الذكور إلى المواليد الإناث أكبر قليلا من الوحدة،  
وعلى ذلك فهي تمثل باحتمال نظري يناظر عملية سحب كرات من سلة عدد  
الكرات المتبرأ الموجودة بها أكبر بقليل من نصف العدد الكلي. تعرض أن  
نسبة المواليد الذكور إلى عدد المواليد الكلي بالنسبة لجميع السكان هي ٥١/١٠٠. في  
هذه الحال يمكن للضارب أن يمنح عميله ربحاً قدره مائة في المائة في حالة عدم  
توافقه ومع ذلك يدمن لنفسه ربحاً ٢٪ على طول الزمن. ولا يتوقف نجاحه  
إلا على إمكانه الحصول على رأس المطلوب. وعلى ذلك النجاح في الرهان  
يتوقف على المبدأ: من عنده يعطى ويزاد ومن ليس عنده يؤخذ منه ولو  
كان القليل الذي يملكه. ولقد حصل الراساليون على زواتهم الضخمة على  
أجاس هذا المبدأ. بينما كان البلاء يخبرون زواتهم نتيجة لعدم فهمهم  
الارتباط بين الاحتمال وبين حدوث ظاهرة من الظواهر، كان معاصروهم  
الأكثر حكمة قد تنبأوا وجود طريق أكثر ضماناً للربح من طريق الإعتماد على  
الحظ وحده. ومن السهل أن نفهم كيف أن مرسلات باسكال وقرمات قد  
أثارت الاهتمام في مجال أعم بكثير من منصبة اللعب إذا تنبأ أن التجار  
الآغباء كانوا في هذه الفترة يبحثون عن مبادئ جديدة للربح.

### نسبة النجاح في الرهان والمساحة:

إن الثغرات الثلاث الأخيرة انقص عن بيان ما يمكن لعلم الرياضة أن  
يؤديه لحل المسائل المسماة المعاصرة، ولكنها على الأقل تبين لقراء كتاب  
والرياضة للليون، أن تعريف الرياضيين للاحتمال له علاقة بما تعنيه هذه  
الكلمة في الحياة العامة. وعلى ذلك سنزيد هنا قليلا ونحاول أن نحصل على

قوائد الاحتمال الرياضي في صورة مبسطة، وسيكون ذلك باستخدام الوسيلة  
القديمة ألا وهي لعبة الصور.

نحن نمثل بمو شي، يمكن قياسه بمنحى وذلك بفرض أن هذا الشيء ينمو  
بدون أن يقفر في ثمرة قفزات بجانبة. يتم عالم الاحصاء بالأعداد الصحيحة.  
والأعداد الصحيحة في نواها لا ترداد بهذه الطريقة. وليس بمتضح لنا أكثر  
فيما بعد، سيكون من الأنسب نمثل دوال الأعداد الصحيحة بطريقة أخرى  
تسمى المستو جرام. والمستو جرام هو صورة وهمية لاحتياج في الحقيقة إلى

إيضاح بالاشكال ١٩٩-٢٠٣- هذه

الاشكال تبين كيف أن (س)

احتمال النجاح مرات عددها ٢٦١٦٠

٦..... الخ يتوقف على (س) عدد

مرات النجاح نفسه. ونحن نمثل من

٦ قيمة معينة من قيم من تناظر قيمة معينة

من قيم من ٦ نمثلها بارتفاع عمود قاعدته

على محور السينات ومتصفها هو الفعل من

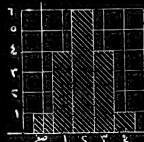
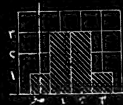
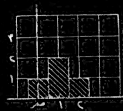
وهذه الطريقة وهمية من وجهة نظر أن

ص ليس لها قيمة بين (س) ثلاثة وميات

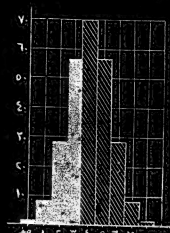
٦ (١ + س) (١) (أربعة وميات)

أو (س - ١) (رمتان) ولكن لها

قوائد كما ستري فيما بعد.



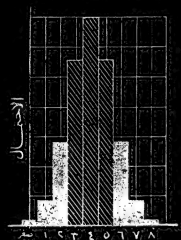
(شكل ١٩٩)



(شكل ٢.١)



(شكل ٢.٢)



(شكل ٢.٣)

الحالة لا تختلف المساحة تحت المنحنى عن مساحة المستوي جرام إلا إختلافاً طفيفاً ، وذلك لأن المثلثات التي تضفيها تتكاد تساوى المثلثات التي نعلمها .

حيث أن منتصف كل عمود هو  $s$  ، فإن نهاية كل عمود هي  $s + \frac{1}{2}$  .  
 وحيث أن الفرق بين أى قيمتين متتاليتين للتغير  $s$  هي  $\frac{1}{2}$  فإن العرض  $\Delta s$  للعمود يساوى الوحدة أيضاً . أى أن  $s = s + \Delta s$  . فرصة الحصول على قيمة أو أخرى من قيم  $s$  هي الوحدة وذلك يتفق مع قاعدة الجمع والطرح . وإذا كان عدد عناصر العينة  $n$  فإنه بناء على ذلك يمكننا أن نكتب مجموع قيم مرات النجاح التي ترد من صفرتى  $s$  بخطوات كل منها يساوى الوحدة على الصورة

$$\begin{aligned} s_1 &= s \\ s_2 &= s + \Delta s \\ s_3 &= s + 2\Delta s \\ &\vdots \\ s_n &= s + (n-1)\Delta s \end{aligned}$$

وإذا كان المحال كبيراً نوعاً فإن المنحنى الأملى الذى يمر بمتصفات الأضلاع العليا لأعمدة المستوي جرام الخاص بالتوزيع ذى الجدين ( كما فى شكل ٢.٣ ) يكون له شكل مميز . ونحن نطلق على هذا المنحنى اسم المنحنى الاحتمالى عندما تكون  $n$  كبيرة كبراً لا نهائياً . ومن الواضح أنه فى هذه

يدو لأول وهلة أنه لا توجد فائدة جديدة فى ذلك ، ولكن قاعدة الجمع تطبيقاً دليلاً جديداً تتبعه . فرصة النجاح مرات عددها  $s$  هي  $s$  .  
 $s = s + \Delta s$  ، وذلك لأن  $\Delta s = \frac{1}{2}$  . وعلى ذلك ففرصة النجاح  $(s + \frac{1}{2})$  من المرات  $[(s + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}]$  هي :

$$s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = s + 1 = s + \Delta s$$

$$s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = s + \frac{3}{2} = s + 1 + \Delta s$$

$$\begin{aligned} s + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} &= s + 2 = s + 1 + \Delta s + \Delta s \\ &= s + 2\Delta s \end{aligned}$$

وللاختصار يمكننا أن نكتب : فرصة النجاح  $(s + \frac{1}{2})$  من المرات على الصورة

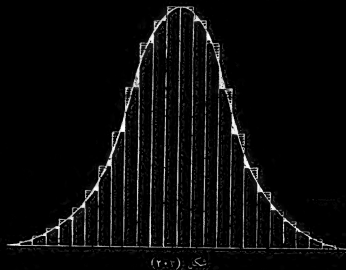
$$h = \frac{s}{1+s} = \frac{s}{1+s} \quad (1)$$

إذا كانت  $s$  كبيرة جداً، يمكننا أن نقرب التقريب الآتي

$$h = \frac{s}{1+s} \approx \frac{s}{s} = 1$$

أما إذا لم تكن  $s$  كبيرة بهذه الدرجة يجب علينا أن نلاحظ أن المبحث في البقعة المتوسطة، ويمكن لأطراف أن يخبر صحة ذلك رسم منحنى مثل الموجود في شكل ٢٠٣. وإن تكون بعدين كثيراً عن الصواب إذا كتبنا

$$h = \frac{s}{1+s} = \frac{s}{1+s} \quad (1)$$



لا تظهر علاقة الاحتمال الرياضي بالحياة العملية إلا على طول الزمن.

وهي تؤدي بنا إلى نتائج تكون أهميتها على حسب كبر العينة التي ندرسها. إن حساب النسبة بين فرصة النجاح وفشله باستخدام قانون التوزيع ذي الحدين أو أي مسكون مشابه لعمل شاق للغاية إذا كانت الأعداد المستندة كبيرة. أما عملية عمل جداول لقيم تكامل بين الحدين  $s = 1$  فإنها تكون في العادة عملية سهلة إذا أمكن التعبير عن  $s$ ، فرصة النجاح  $s$  من المرات، في صورة يمكن تكاملها أو إذا أمكن إيجاد عبارة في  $s$  يمكن تكاملها وتساوي  $s$  تقريباً. فبلا في حالة التوزيع ذي الحدين الرصيدي يرداد بحظوات كل منها يساوي الوحدة، العبارة المضبوطة لعينة الزائفة هي

$$s = \frac{1}{n} \quad (1)$$

المبحث الاعتيادي المناظر الذي يصف هذه الحالة بدقة كبيرة عندما  $n = 16$  أو على العموم عندما  $n < 8$  هو

$$s = \frac{1}{n} \quad (1)$$

وكيفية إيجاد مثل هذا المبحث المناسب هي إحدى المسائل التي نهتم بها نظرية الاحصاء، ولا يمكننا في هذا المجال الضيق أن ندرس هذه المسألة الهامة الوافية التي تستعمرها، وكل ما يمكننا القيام به في هذا الباب هو إثارة شبهة القارئ لدراسة أهم من هذه وأن تبين له المسائل التي تقع في مجال الاحصاء الرياضي.

تبسيط نظرية مندل:

قد يكون القارئ، مثله في ذلك مثل المؤلف، قد نشأ متأهدة دينية. في هذه الحالة قد يقول القارئ (أو القارئة): كل ما تعبدناه عن الاحتمال الرياضي هو تقنية المقامرة ولكننا لا نريد أن نقامر. رجو تعليق عادل. ستفرض

أيضاً أن القارئ قد قرأ كتاب المؤلف ، العلم للبواقي ، وذلك يكون قد وصل إلى علمه كيف أن علم الوراثة قد ساعد على زيادة إنتاج القمح والذرة والبطيخ والسكر في العالم . في هذه الحالة سيعلم القارئ أن علم الوراثة يبيد في تنظيم موارد العالم لخدمة المطالب البشرية العامة ، وإن يتفاد إلى تصديق أن نظرية الجينات لم تدل تؤدي بنا إلى عدم الاستمتاع بالإصغاء إلى المعنى الوحي بول روبنسون في « مريح أمريكا » .

بدأت نظرية الجينات لمثل باكتشاف أن البيانات المهيمنة من أبوين نقيين تماماً ومن نوعين مختلفين تكون النسبة بين البويضات في سلالاتها نسبة عددية محددة . وقد أدى هذا إلى الاعتقاد بأن التكوين الوراثي للفرد يتوقف على جسيمات مفردة ( الجينات ) مثل جزيئات الغاز ، في نظرية الحركة تفترض أن سرعة الجزيئات المختلفة تتغير كما في توزيع ذي جدين . في نظرية الجين تفترض أن فرصة إحصاء بويضة معينة من بويضات الأم بمخلية ذكرية من الأب هي نفس فرصة سحب كرة من كرات ملونة موجودة في دالة .

وتبين لنا إحدى تجارب مندال الأولى استخدام الاحتمال في وضع أسس نظرية الجين . هجين مندل أنواعاً نقية ( من سلالة واحدة ) من البازلاء ، النوع الأول بذرتة صفراء ، والثاني بذرتة خضراء . فوجد أن بذرة البازلاء المهيمنة صفراء . وعند ما خصبت هذه النباتات المهيمنة بنفس جبوب لقاحها ، وجد أن ربع سلالاتها كانت بذرتة خضراء ، كما وجد أن سلالة ( أي سلالة هذا الربع ) عند ما خصب بجبوب لقاح كانت ذات بذرة خضراء . أما الباقى فكانت بذرتة صفراء . وثالث هذا الباقي ، أي ربع السلالة الكلية ، كانت سلالاته ذات بذرة صفراء . عند ما خصب بنفس جبوب لقاحه مشابهاً في ذلك التباين الجيني ذوا البذرة الصفراء . أما السلالة الابنية ذات البذرة الصفراء ، فندت أخصابها بنفس جبوب لقاحها ، وجد أن سلالاتها تحتوي على نباتات صفراء وخضراء ، نسبة ٣ : ١ مثل سلالة والديها . وعلى ذلك فالهجين بين الأنواع النقية يثمر بالبويضتين الماهتين اللتين يترتب بها التفاعل الكيمياءى والتين أدنا للنظرية الذرية للأعداد الكيمياءى . الصفة الأولى هي

أنه يمكن الحصول على ميزات الوالدين الأصليين للنبات المهيمن مرة أخرى بنفس النقاء . والصفة الثانية هي أن التركيبات المختلفة لصفات الوراثة تحدث بنسب عددية ثابتة . الجدول الآتي يبين نتائج العلماء الذين قاموا بإجراء تجارب التجارب على نفس أنواع البازلاء في الدول المختلفة وفي مناسبات مختلفة .

(ج) سلالات البازلاء المهيمنة ذات البذور الصفراء

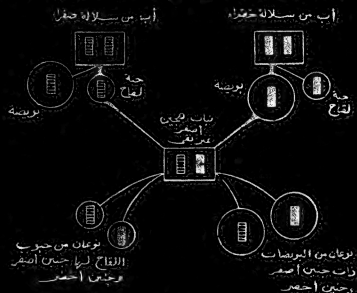
عدد البويضات : ١٠٠٠٠٠

(١) النتائج (ب) الذراع

البيات المهيمنة (بذور صفراء)	النسب المئوية للأصناف	الإجمالي
١٨٦٥	٧٥,٠٥	٢٤,٩٥
١٩٠٠	٧٥,٤٧	٢٤,٥٣
١٩٠٠	٧٥,٠٥	٢٤,٩٥
١٩٠٤	٧٤,٦٤	٢٥,٣٦
١٩٠٥	٧٥,٣٠	٢٤,٧٠
١٩٠٥	٧٣,٦٧	٢٦,٣٣
١٩٠٩	٧٥,٠٩	٢٤,٩١
١٨٢٣		
١٨٤٧		
٤٧٧٠		
١٧٥٥		
١٥٨٠٦		
١٩٥٣		
١٤٥٢٤٦		

النتائج التجريبية لمثل هذا التهجين تؤدي إلى استنتاجين . لون البذرة يتوقف على شيء ما يحصل عليه كل نبات من كل من أبويه . في حالة البازلاء ذات البذرة الخضراء إما أن تكون بذرة كل من الأبوين خضراء أو أن يكون كل من الأبوين ناتج من سلالة أبوين بذرة كل منهما خضراء . وعلى ذلك فهذا الشيء الذي عليه النبات المهيمن من أبويه الأخضر يجعل بذرتة خضراء . إذا هو حصل عليه من كل من أبويه بنفسى هذا الشيء . جينا . إذا اقترصنا وجود جسيمات تتوقف عليها النسبة العددية للصفات المهيمنة ، مثل الفرض بوجود جسيمات تتوقف عليها لون بين الاتحاد الكيمياءى ، فإنه يكفينا لتفسير النتائج المتعددة لتجارب الوراثة المختلفة أن البنية من فردين بسيطتين : الأول هو أن نوع الجين التي تحوي البويضة لا يؤثر على فرصة إحصاء جينة اقتراح

ذات جين من نوع أو آخر . والفرض الثاني هو أنه عندما يكون النبات  
بويضات أو حبات لقاح فإن كل بويضة أو حبة لقاح تحتوي على جين واحد  
من أحد النوعين . النبات المجهين الأصفر في هذه التجربة يحصل الجين الأصفر  
على جين واحد تسميه الجين الأصفر والجين الآخر وهو الجين الأخضر



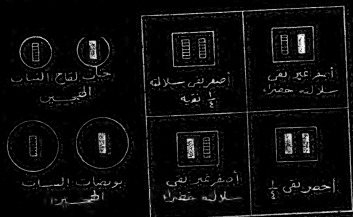
شكل (٢-٤)

يتم وضع الجينات التي تؤثر على لون بذر البازلاء

يأتي من الأب الأخضر . نصف حبات اللقاح ونصف البويضات حبات على  
جين من أحد الأبوين والنصف الآخر حصل على جين الأب الثاني . وتطبيق  
هذين الفرضين مبين بالرسم في شكل ٢٠٤ . ٢٠٥

حسب رأي مندل يتكون التركيب الوراثي للفرد من أزواج من الجينات  
مأخوذة من كل أب . وكل حبة لقاح أو بويضة تحصل على جين واحد فقط من  
هنا الزوج من الجينات ، وفرصة ازدياد حبوب اللقاح والبويضات من  
اللونين ( الأصفر والأخضر ) متساوية واحتمال احصاء بويضة من نوع معين

حبة لقاح من نوع آخر يتوقف على نسبة وجود الأنواع المختلفة ونسبة كل من  
الأزواج الصفراء ( أو الخضراء ) إلى غير الصفراء هي ٣ : ١ . وهذا يكافئ



شكل (٢-٥)

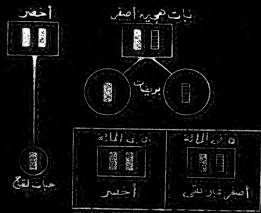
الاحتمال في تزاوج مبدئ بوري

قولنا أن النتائج التي نحصل عليها تشابه نتيجة رمي قطعة نقود مرتين ، أو نتيجة  
أخذ كرة من سلتين تحتوي كل منهما على كرات بيضاء أو حمراء بنفس العدد  
الجدول الذي أعطيناه فيما سبق والذي يبين نتائج باحثين آخرين قاموا بإجراء  
نفس التجربة التي استخدمت التوضيح النظري الأولي للجينات . يظهر منه أن  
النسبة العددية للأزواج المختلفة ليست ثابتة تماماً هذه النسبة يمكن اعتبارها  
ثابتة من وجهة النظر الاحصائية .

هذه العبارة الأخيرة التي أتينا بها تحتاج إلى أن تدرس بعناية كبيرة . عند  
افراضنا الفرض الذي يفسر النتائج ، أجبنا عما يوردنا احصائياتنا يمكن تطبيق  
التفكير الرياضي للاحتمال عليه وهذا يعني أن الأعداد التي نحصل عليها من  
العينات المتساوية في عدد أفرادها تختلف عن متوسط الأعداد التي نحصل عليها من  
عدد كبير من العينات وذلك حسب قاعدة ذي الحددين . يبين شكل ٢٠٦ أنه عند  
تجهين البازلاء "صفراء غير نقية بالبازلاء الخضراء فإن فرصة الحصول على







(الشكل ٢٠١)

بذرة خضراء أو صفراء غير نقية هي  $\frac{1}{2}$  نفرض أننا حصلنا على اثني عشر نباتاً فقط. يجب ألا نتوقع وجود ستة نباتات بذرتها خضراء وستة بذرتها صفراء والحصول على عدد متباين من النوعين يكون مستحيلاً طبعاً إذا كان عدد عناصر العينة محدوداً. نفرض في تجربة معينة أننا حصلنا على اثني عشر نباتاً جميعاً من الممكن في هذه التجربة أن يكون عدد النباتات ذات البذرة الخضراء من صفري إلى ١٢. وإذا كان التوزيع الطبيعي الذي اخترناه من نوع نصف النتائج وصفاً مضبوطاً فإن فرصة الحصول على هذه الأعداد هي جسيمة ومفكوك ذي الحدين.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

إذا كانت  $K = \frac{1}{2}$  هي احتمال كون أحد النباتات أخضراً فإن متوسط عدد النباتات الخضراء في جميع البساتين الـ ١٢ يساوي  $K = \frac{1}{2}$

إذا كنا نحصل في تجربة واحدة على خمس نباتات وسبع صفراء. فإن النتيجة تتفرق عن المتوسط بواحد صحيح. واحتمال وقوع العدد في المدى  $K \pm 1$  (م المتوسط) هو

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64} \quad \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

$$\frac{250.8}{40.96} = \frac{792 + 924 + 792}{40.96}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال النجاح والفشل هي ٣٥٠٨ : ١٥٨٨ أو ٣٥٠٨ : ٣٥٠ تقريباً. وبالنجاح هنا يعني أن عدد النباتات ذات البذرة الخضراء لن يكون أكبر من ٧ أو أقل من ٥. أما احتمال كون هذا العدد ٦ أي النصف بالضبط فهو

$$\frac{250.8}{1000} = \frac{924}{1000} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

وعلى ذلك فالنسبة بين احتمال كون هذا العدد ٦ وعدم كونه هي ٣٥٠ : ٧٩٢ أو  $\frac{1}{2}$  تقريباً. إذا طالبنا بانه  $\frac{1}{2}$  فإن نتائج الملاحظة مع النتائج النظرية تكون في الواقع قد طالبتنا بالكثير. وعلى ذلك يجب علينا ألا نعجب إذا وجدنا أن النتيجة الملاحظة أكبر بقليل أو أصغر بقليل من المتوسط. ولكن احتمال الحصول على عدد يفتقر عن المتوسط بأكثر من الوحدة هو أقل من عكسه. وعلى ذلك فيجب ألا نفع بنتيجة التفرق بينهما وبين المتوسط أكثر من الوحدة. وعلى ذلك يدخل في تقرير انصاف بين النتائج النظرية والعملية من وجهة النظر الاحصائية مجموعة من القيم. وبذلك لا نقسو كثيراً على النظرية أو نقتصد في طلباتها منها. الأعداد التي تدخل في المسألة السابقة صغيرة بدرجة لا ترضى العالم العملي، وقد اخترنا هذا المثال لسبب واحد هو أن حله لا يتطلب مجزئاً كبيراً. في الحياة الواقعية، لا يمكن الحصول على نتيجة مضبوطة يمكن إجراء التجارب بمئات كثيرة واستخدام تكامل المتكامل الاعتيادي. كما يستخدم المهندسون جداول الجيوب والظللات بدلاً من حل المسائل من المادى الأولية على أساس حسابات أقلدس. وهذا

بين كيف يحصل علماء الرياضة على أجورهم حتى ولو كان علمهم يحلج  
السرور لهم .

### الغشور على فرق حقيق

يوجد نوع من الاستهلال له علاقة وثيقة بنظرية الاحتمال مثل السؤال  
الآتي : هل التطعيم ضد الجدري يعطى مناعة ضده ؟ لا يكون هناك داعياً  
على الإطلاق لأن نلجأ إلى علم الرياضة إذا كان جميع الأشخاص الذين  
يطعمون لا يمرضون بالجدري أبداً أو إذا كان عدد كبير من الذين لا يطعمون  
يصابوا بهذا المرض . والواقع أن كلا من هاتين البيرتين غير صحيح . يجب  
أن يكون حكماً على الموضوع مبدأً على الإجابة على السؤال الآتي :  
هل الإصابة بالجدري بين الأشخاص الذين لم يطعموا أصح أم على  
بدرجة ملحوظة منها بين الأشخاص الذين طعموا ؟ وأهم كلمة في هذه العبارة  
هي ملحوظة .

لا يمكننا في هذا المجال أن نحاول إعطاء إجابة شاملة لسؤال من هذا  
النوع . وكل ما يمكن عمله هو إعطاء مفتاح للإجابة . طريقة دراسة عالم  
الإحصاء هذه المسألة هي أن يسأل أولاً : هل نتيجة تجربة على تطعيم لا تستند  
إلى الأساس ؟ أو بصيغة أخرى هل هي من نوع النتائج التي تعتبرها غريبة للغاية  
في إحدى لعب الحظ ؟ وعلى ذلك تصنع نموذجاً . ولكني يكون هذا النموذج  
أولاً على قدر الإمكان . سنفتقر أنه يمكننا ملاحظة ما يحدث عند تطعيم .  
أو عدم تطعيم نفس المجموعة من الأفراد . وطبعاً هذا تبسيط للبساطة ،  
ولكن ليس من الصعب أن نتبع طريقة للحل يمكن بها أن نقارن فيما بعد بين  
إحصائيات التطعيم للجمع عات الأفراد المختلفة في العدد . في حدود هذه  
القيود ، يصبح من الأسهل توجيه اهتمام القارئ إلى مسألة الغشور على  
فرق حقيق .

نفرض أننا وجدنا أن نسبة الذين يصابون بالجدري من الذين يطعمون  
ضده أقل منها في حالة عدم التطعيم ، ونسأل : هل هذا الفرق لا أساس له ؟

أو بمعنى آخر ما لا يتغير حدوثه في إحدى لعب الحظ ، إذا أخذنا عشرين  
عدد أوراق كل منها معين من مجموعتين متساويتين . في الواقع أن عديد  
الأفراد الذين يطعمون والذين لا يطعمون ضد الجدري كبير جداً . وقد  
رأينا أن الإعادة في هذه الحالة لا تؤثر كثيراً على حساب الاحتمال . وعلى  
ذلك تكون نموذجاً من تدرج لعب الحظ بدون شروط الإعادة . مجموعاً ورق  
العب تسطران مجموعي الأفراد اللتين تقارنهما . وعدد الأوراق المكتوبة  
بناظر عدد المصابين بالجدري . نحن نعلم الآن معرفة هل كثيراً ما يكون  
الفرق بين الأوراق المكتوبة التي تحصل عليها من كل مجموعة يساوي مقداراً  
معيناً أم أن ذلك نادر الحدوث . شكلاً ٢٠٨ و ٢٠٧ . يبينان كيف يمكن الحصول  
على إجابة وذلك باستخدام ما تعلمناه عن التوزيع ذي الحدين وقاعدة لوجه  
الشطرنج معاً والذي يمكننا عمله بعينات عدد أفراد كل منها . يمكننا تعميمه  
للعينات الأكبر .

إذا وضعنا الآن فرضاً عكسياً ، أي فرضاً يحسم الخلاف في مسألة مثل  
هذه . نسأل أنفسنا : هل الفرق الذي نلاحظه في هذه الحالة التجريبية نادر  
الحدوث بدرجة تجعلنا نشك في حقيقة تساوي مجموعتي الأوراق ؟ وعلى ذلك  
فإننا نسلم بالفرض العكسي وهو في هذه الحالة أن الأفراد على العموم  
لا يستفيدون من التطعيم . إذا كنا نعلم احتمال إصابة فرد من الأفراد بالجدري  
في هذه الحالة ، فإن طريقة شكلي ٢٠٧ - ٢٠٨ توضح كيفية حساب عدد  
المرات التي يتعدى فيها الفرق بين عدد الإصابات بالجدري في عشرين متساويتين  
عدد أفرادها معلوم الحد الأدنى لجميع القيم التي قد نأخذها .

لدينا هنا عقبة أخرى يجب تخطيها . وذلك لأنه لا يوجد لدينا عدد يدل  
على نسبة الذين يصابون بالجدري في هذه الحالة . إذا كان الفرض العكسي  
الذي فرضناه صحيحاً - فإن كل من المبدئين اللتين ندرسهما - طعمت ضد  
الجدري أم لم تطعم - فهذه إحدى مجموعتي ورق متساويتين شكلي ٢٠٧ .

وتكون مجموعة واحدة من هاتين المجموعتين تحصل على عية أكبر من  
نفس المحال ، وبالتالي على رقم أدنى لاحتمال الإصابة بالجدري من نسبة مجموع





$$[ \frac{(1-5n)}{6} ] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$[ \frac{(1-5n)}{6} ] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

لقد وجدنا مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٥. وكذلك مجموع  
مربعاتها (ص ٣٢٢ - ٣٢٣). يتبعون (٥ - ١) بدلا من ٥ في العبارات  
التي حصلنا عليها نجد أن مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ٥ (٥ - ١) ٦  
ومجموع مربعاتها (٥ - ١) ٣٠. (٥ - ١) ٦ (٥ - ١) ٣٠  
على الترتيب

وعلى ذلك فالمجموع المطلوب هو

$$\left( \frac{(1-5n)}{6} \right) \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left( \frac{(1-5n)}{6} \right) \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

$$= \left( \frac{(1-5n)}{6} \right) \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left( \frac{(1-5n)}{6} \right) \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

هذا هو الزول الكلي في الرتبة. يحصلون على المتوسط نقيم هذا المجموع  
على ١٠ فيجد أن متوسط الزول في الرتبة هو

$$\frac{(1-5n)}{6}$$

كما ذكرنا من قبل  
كنا نل على استخدام معامل سير مان ستقرص أن درجات الاختيار (١)  
٦ دخل الوالدين (٣) ثمانية تلايمد على كما يأتي:

١	٢	٣	٤	٥
١	١	١	١	١
٢	١	١	١	١
٣	١	١	١	١
٤	١	١	١	١
٥	١	١	١	١
٦	١	١	١	١
٧	١	١	١	١
٨	١	١	١	١
٩	١	١	١	١
١٠	١	١	١	١

كما هو مبين فيما سبق توجد ترتيبات مختلفة عددها  $\frac{(1-5n)}{6}$  لأشياء عددها  
٥. وعدد الزيادة في الرتبة يساوي عدد النقص فيها. بالنظر إلى الصف العلوي  
نجد أن عدد المرات التي يوجد بها كل واحد من الأعداد (٥ - ١) التي عددها (٥ - ١)  
هو عدد الطرق المختلفة التي يمكن بها ترتيب الأشياء الباقية (٥ - ١) التي عددها (٥ - ١)  
٦ أي أن كل عدد يوجد  $\frac{(1-5n)}{6}$  من المرات. العدد الآخر (٥ - ١) يمكن  
أن ننقص رتبته بمقدار ١٠ ٦ ٢ ٦ ١ ٦ ٠ (٥ - ١) وكل نقص من هذه  
معدلات  $\frac{(1-5n)}{6}$  من المرات. العدد التالي (٥ - ١) يمكن أن ننقص رتبته  
بمقدار ١٠ ٦ ٢ ٦ ١ ٦ ٠ (٥ - ١) وكل نقص من هذه يحدث  $\frac{(1-5n)}{6}$   
من المرات. وعلى ذلك يمكن عمل الجدول الآتي لجمع النقص في الرتبة:

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

مجموع جميع مكررات هذا الجدول هو

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 3 + 2 + 1) \cdot (1-5) -$$

$$\left[ \frac{(1-5n)}{6} \right] \cdot (1-5) + \dots + 2 + 1) -$$

في كل من هاتين المتسايلتين توجد حدود عددها ٥. مبنية بالقيمة وعلى  
ذلك فالحد الأخير فيها هو على الترتيب (٥ - ١) (٥ - ١) (٥ - ١) وعلى  
ذلك يكتب بالأسبق على الصورة:

الترتيب العمودي للتلاميذ على هذين المقاييس هو

(١) الفرق في الرتبة		(٢) الفرق في الرتبة	
١	٢	١	٢
٢	٣	٢	٣
٣	٤	٣	٤
٤	٥	٤	٥
٥	٦	٥	٦
٦	٧	٦	٧
٧	٨	٧	٨
٨	٩	٨	٩
٩	١٠	٩	١٠

المجموع الكلي للنقص (أو الزيادة) في الرتبة  $\pm ٧$  متوسط النقص في الرتبة

$$\frac{١ - ٨}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١$$

$$١ = \frac{٦ \times ٧}{٦٣} = ٠,٣$$

وعلى ذلك فالتناظر الرأسى هو ٣٣٪ كما يبين هذا الجدول

## ملاحق

### الملحق الأول

قانون الجيب للثلثات الكروية

يمكننا استخدام شكل ١٢٤ في إيجاد قانون الجيب مباشرة هكذا . عندما نملك النموذج في شكل ١٢٣ تدور النقطة المتحركة  $A$  حول الخط المستقيم  $AB$  ونرسم قوساً دائرياً في مستو عمودى على  $AB$  والمستوى  $ABC$  حتى تأخذ الموضع  $A'$  . وبالمثل نرسم قوساً دائرياً حول الخط المستقيم  $BC$  حتى تأخذ الموضع  $A''$  ، وإذاً

$$A'A = A''A = ٩٠^\circ = A''A'$$

(١)

(٢)

وعندما نطبق الشكل إلى موضعه الأصيل نضع  $A$  مباشرة فوق نقطة  $C$  في المستوى ولكن حيث  $C$  هي النقطة التي يقابل عندها نصف القطر  $AB$  المبركين

من الشكل الأول نحصل على

$$(١) \quad \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a \sin A = b \sin B = c \sin C$$

لكن الزاوية  $A$  هي الزاوية بين المستويين اللذين يشملان القوسين  $AB$  و  $BC$  على الترتيب ، وإذاً فالزاوية  $A$  هي الزاوية  $B$  في المثلث الكروى . من الشكل الثاني نحصل على





وبإجراء نفس العمل لقيم  $n$  المختلفة نجد مثلاً أنه عندما  $n = 1$  تقرب

الجملة من القيمة  $\frac{1}{2}$  بعد  $\frac{1}{2}$  من السين يسعر  $\frac{1}{2}$  %

وإذاً لزم علينا أن نحيز قيمة  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  عندما تصبح  $n$  كبيرة

كبيرة لانهائية، أو عندما تصبح  $\frac{1}{n}$  صغيرة صغراً لانهائياً وأخيراً نضع

$$\frac{1}{n} = \text{صغراً}$$

بالتخدام متسلسلة ذات الحدين :

$$\times \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(1 - \frac{1}{n})^n (1 - \frac{1}{n})}{3 \times 2} + \left(\frac{1}{n}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{2} + \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{3 \times 2} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n}\right)$$

وإذاً إذا كانت  $n = 1$  فالتا نجد أن :

$$\times \frac{1}{2} + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \times 2} + \dots$$

$$\dots + \left(\frac{1}{n}\right) \frac{(1 - \frac{1}{n})^n}{2} + \left(\frac{1}{n}\right)$$

### الملحق الثالث

استخدام نظرية ذات الحدين في اثبات الخاصية الاسية

توجد طريقة أخرى لإثبات أن :

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

وقد عرفت هذه الطريقة عند دراسة جداول الرفع المركب . فن هذه الجداول دعنا نكون جدولاً يبين جملة الجنيه بعدد  $n$  من السين يسعر

$$\frac{1}{n} \% \text{ بين الجدول الآتي بعض القيم عندما } n = 1$$

عدد السين	السعر	الجملة
٢٠	٥ %	٢,٦٥٣
٢٥	٤	٢,٦٦٦
٤٠	٢ ½	٢,٦٨٥
٥٠	٢	٢,٦٩٢
١٠٠	١	٢,٧٠٥

نلاحظ أن الجملة في العمود الأخير تكاد تكون متساوية وانها تزيد بازدياد  $n$  . ماذا يحدث إذن عندما تصبح  $n$  كبيرة كبراً لانهائياً ؟ أى ما هي

قيمة  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  عندما تصبح  $n$  كبيرة كبراً لانهائياً ؟ الجواب على

ذلك هو  $e = 2,718$  . ونكتب هذا الجواب رياضياً على الصورة

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ولكن  $\left(\frac{1}{n} + 1\right)^m = \left\{ \left(\frac{1}{n} + 1\right)^m \right\}$  وإذا

$$\left[ 1 + m + \frac{m(m-1)}{2} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \right]$$

$$\left[ m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \dots \right]$$

$$\left[ \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \dots \right]$$

وبوضوح  $\frac{1}{n} =$  صغيراً يحصل على

$$1 + m + \frac{m(m-1)}{2} + \frac{m(m-1)(m-2)}{6} + \dots = \left(\frac{1}{n} + 1\right)^m$$

$$= \left(\frac{1}{n} + 1\right)^m$$

### الملحق الرابع

لإثبات أن إذا كانت  $n$  كبيرة جداً فإن  $m = n^{\frac{1}{2}}$  تؤهل إلى

$$m = \Delta$$

إذاً ربما قطعة ذات الحسة قروش مد من المرات فإننا نحصل على توزيع  
تعدادات مستطيلات كذلك المرسوم متفق شكل ١٩٩، تبين احتمال الحصول على صفر أو ١  
أو ٢ أو ... أو  $n$  من الرؤوس، ونفرض أننا نضيف قيمة صغيرة  $(- \frac{1}{n})$   
من كل رأس  $\frac{1}{n} + \frac{1}{n}$  من كل رأس، ولذا في المستطيلات التي ارتفاعها  $\frac{1}{n}$

الذي هو احتمال الحصول على  $m$  من الرؤوس  
ينظر كنه أو خطأ

$$m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

وبنفس الكيفية ينظر المستطيل الذي ارتفاعه  $\frac{1}{n}$  خطأ

$$m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

وحيث أننا نجعل  $n$  عرض المستطيلات صغيراً إذن يجب أن يزيد ارتفاعها  
حتى تكون المساحة الكلية للمستطيلات مساوية للوحدة، لينظر حالة التأكيد  
لأن في هذه الحالة يكون الخطأ له قيمة مؤكدة يمكن أن تكون العنصر  $\frac{1}{n}$   
ونفرض أننا نضرب كلا من الارتفاعات  $\frac{1}{n}$ ،  $\frac{1}{n}$ ، إذن فالارتفاع من الذي

يتوافق على  $m$  يحق

$$m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

وعندما

$$m = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

$$\Delta = \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^m$$

فإذا أخذنا  $n$  صغيرة  $n$  كبيرة فإن ذلك يساوي قيمة  $\frac{1}{n}$  عند

النقطة التي في منتصف المسافة بين (س ٦ ص ٦) و (س ٦ ص ٦) وعند هذه النقطة

$$س = \frac{١}{٢} (س + س) = \frac{١}{٢} (٦ + ٦) = ٦$$

$$ص = \frac{١}{٢} (ص + ص) = \frac{١}{٢} (٦ + ٦) = ٦$$

وإذاً

$$\frac{س}{ص} = \frac{١}{٢} = \frac{١ - ٦ - ٦}{١ + ٦ - ٦} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{٢ \times (١ + ٦ - ٦)}{(١ + ٦)} \times \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

وبأخذ ل صغيرة  $٦ + ١$  كبيرة بحيث أن  $\frac{١}{٢} (٦ + ١) = ١$  يساوي

$$\frac{١}{٢} (٦ + ١) = ١ \text{ فبذلك يمكن أن نأخذ } ٦ = ١, ٦ = ١, ٦ = ١ \text{ أو } ٦ = ١, ٦ = ١, ٦ = ١$$

$$\frac{س}{ص} = (٢ - ٢) = ٠$$

$$\frac{١}{ص} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢}$$

## الملحق الخامس

تعيين الموضع باستخدام نقطة قدم الأجسام السماوية

في وقتنا الحاضر، هم الكثيرين من القراء أن يدربوا كيفية تعيين المكان أثناء الطيران بدلاً من تعيينه بجراً أو برّاً. والدراية التالية هي بأن فهم أسس الملاحة ورسم الخرائط المعطاة في الباب الثامن، ويرغب في تفهم أسس تطبيقها في الحالات الخاصة التي تكون فيها السرعة كبيرة بحيث لا يوجد مجال لإجراء عمليات حسابية طويلة أو أخذ قراءات لفترة طويلة. بواسطة قوانين المثلث الكروي يمكننا تعيين خط العرض وخط الطول برّاً، بمشاهدة ارتفاع جسم سماوي وأحد زواياه السموية في نفس اللحظة، حيث الزمن يتوقف جرينتش، ولكن، لأسباب عديدة، لا يمكن عملياً تعيين الزاوية السموية لجسم سماوي بدرجة كبيرة من الدقة، ونحن على ظهر السفينة أو غيرها. لذلك يحاول الملاحة جده في استخدام ارتفاع الجسم عندما يمر مستوى الزوال، فأنشاء الليل يستخدم الراصد أي نجم لا نحجبه السحب وقت عبور مستوى الزوال. أما أثناء النهار فلا نعلم إلا على جسم سماوي واحد هو الشمس. فإذا جئنا السحب الشمس عند الظاهر الخالي فإن الطريقة المعتادة، وهي مشاهدة أكبر ارتفاع الشمس، والزمن يتوقف جرينتش عنده، تكون الشمس في أعلى نقطة في السماء، فنقبل، ولإيجاد خط العرض وخط الطول يرجع الملاحة إلى الطريقة السابقة، والأساس في هذه الطريقة هو كما يأتي:

أي نجم ميله  $ل$  هو نجم سمى بالنسبة إلى كل مكان خط عرضه  $ع = ل$ . وإذاً يوجد على دائرة العرض  $ع$  مكان معين ما عند أي لحظة، بحيث يكون نجم ما ميله  $ل = ع$  في سمت الرأس لهذا المكان. يسمى هذا المكان الذي خط عرضه  $ع$  نقطة قدم ذلك النجم عند هذه اللحظة ويقع على خط طول في نفس مستوى دائرة مطلع مستقيم النجم عند هذه اللحظة. وهذا صحيح أيضاً بالنسبة إلى أي جسم سماوي مثل الشمس. ففي أي لحظة معينة يرجد موضع يسمى نقطة قدم الشمس، بحيث تقع الشمس فوقه مباشرة، وخط عرضه هو













أثناء الظلام، إلا أنه يمكننا إذا دعت الضرورة أن نطبق مبدأ الطريقة الصيفية نستفيد من فترة قصيرة خالية من السحب في ليلة مظلمة ملبدة بالغيوم .

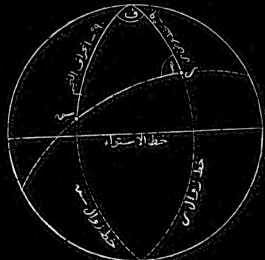
وهذه هي الطريقة الأساسية لتعيين المكان أثناء الطيران لئلا يحدث لأي من النجوم في شمعنا ضوئي . وبينما لا نذهب السفينة بعيداً في الفترة بين عبورين متتاليين للنجم معروف تقطع الطائرة مسافة شاسعة فينتج عن الطيار أن يعرف طريقة تعيينها المكان ، لا تتوقف على انتظار عبور نجم . يعرف عليه بقراءة من الجداول ميله ومطلع مستقيمه . وإذا شاهدنا البعدين السمتين النجمين في وقت واحد فإنه يمكننا رسم دائرة موضع حول نقطة قدم كل منهما ، ويمكننا أن نختار النجمين بحيث تكون نقطتنا تقاطعهما متباعدتين بألف أو أكثر من الأميال فيكون عندئذ من السهل تحديد المكان من بين هاتين النقطتين .

ولرسم دائرة الموضع التي نصف قطرها  $90^\circ$  حول نقطة قدم الشمس أو نقطة قدم النجم ، على سطح الكرة الأرضية علينا أن نرسم دائرة لها نفس نصف القطر مثل دائرة خط العرض  $90^\circ$  — س . ويمكننا إجراء ذلك بواسطة دبوس وخط وقلم أو بواسطة برجل يمكن بواسطته رسم دوائر على سطح كرة . إلا أنه لكي توجد موضعنا بحيث لا يزيد الخطأ عن ميل واحد فإنه يلزمنا سطح كروي كبير جداً بالنسبة إلى السفينة وبالأحرى كبير جداً بالنسبة إلى المستوى . ولتعيين نقطة التقاطع المطلوبة يقوم الطيار أو البحار برسم خريطة كبيرة ، وبالقرب من الموضع الذي تحدده طريقة تقريبية على خريطة كبيرة لا يختلف قوس دائرة الموضع حول نقطة قدم جسم سماوي كثيراً عن المماس لهذا القوس أي عن خط مستقيم . وجميع دوائر الموضع حول نقطة مبنية على سطح الكرة الأرضية هي دوائر متحدة المركز ، وإذا كان نصف قطر دائرة الموضع كبيراً أي كان البعد السمتي للنجم  $< 90^\circ$  فإن جميع الأقواس المناظرة على خريطة كبيرة تبدو خطوطاً مستقيمة متوازية .

وحيث أن نصف قطر دائرة الموضع حول نقطة قدم الجسم السماوي هو البعد السمتي للجسم السماوي عند نفس اللحظة وإن الفرق  $1^\circ$  بين نصفي

قطري دائري موضع ينظر فرقا  $1^\circ$  بين البعدين السمتين عند موضعين على أحد القوسين أو الآخر ، ومعنى ذلك أن الأمكنة التي تقع على خطوط الموضع الموازية المتباعدة  $69$  ميلاً على الخريطة هي الأماكن التي عند اختلاف البعد السمتي  $= 1^\circ$  . وبالعكس إذا كان الفرق بين البعدين السمتين للنجم عند مكانين على الخريطة  $1^\circ$  فإن المكانين يقعان على خطين متوازيين متباعدين  $69$  ميلاً . فإذا علمنا أحدهما في أي مكان فإنه يمكننا رسم الثاني بنفس الإحداثي على البعد المناظر ، منه .

ولكني نرسم خط الموضع الحقيقي بسرعة معقولة نحتاج إذن إلى خط رئيسي يصل بين الأمكنة التي لها بعد سمّي واحد معلوم عند اللحظة التي نعين بها البعد السمتي الحقيقي للنجم . وبذلك تصبح مسألتنا هي كيفية وضع خط رئيسي على الخريطة أو بالأحرى وضع خطين رئيسيين ، واحد لكل من النجمين اللذين نستخدمهما ولإيجاد نقطة تقاطع خطي موضع حقيقيين



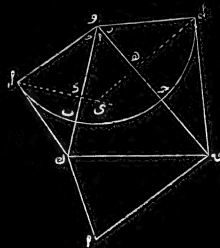
(شكل ٢)

وعلى سطح الكرة الأرضية أي قوس يصل نقطة رئيسية معلوم بعد



على مقدار الفرق بين ( $6^{\circ}$  م  $6^{\circ}$  س) البعد السمى ككل نجم عند الموضع الحقيقي والبعد السمى المناظر للنجم عند النقطة الرئيسية أى الموضع المفروض. وكل ما يتبقى هو أن نرسم خطين يوازيان الخطين الرئيسيين وعلى بعد ٦٩ م  $6^{\circ}$  س. ييلا منهما على الترتيب ، ونقرأ خط عرض وخط طول نقطة التقاطع فنكتبرن بذلك قد حصلنا على موضعنا الحقيقي .

ولكن نرسم خط الموضع الحقيقي بدقة أكثر نعتبر قيمة أدق من القيمة ٦٩ ميلا لطول القوس الدائرى الذى يقبل زاوية ١ عند مركز الارض . ولا يفوتنا أن الكروون متر يعطيان الزمن بتوقيت جرينتش المتوسط . بينما نحن نستخدم الزمن بتوقيت جرينتش المحلى لنحصل على الزاوية الساعية للجسم السماوى عند المكان المفروض عند اللحظة المعنية ، ونحن نجرى ذلك كما هو موضح فى كتاب (Science for the Citizen) صفحة ٦٣ ، وبالرجوع إلى جداول معادلة الزمن . . ولكن استفيد من الجداول الخاصة بحلول المثلثات الكروية عند إجراء بعض العمليات الحسابية اللازمة لرسم الخطوط الرئيسية يجب أن نختار خط عرض المكان المفروض عددا صحيحا من الدرجات ، وخط طول يجعل الزاوية الساعية لنقطة قدم النجم بالنسبة إلى النقطة الرئيسية عددا صحيحا أيضا .



(شكل د)

ولتبسيط الدراسة السابقة قد افترضنا أننا نأخذ البعد السمى للنجمين فى نفس اللحظة . وللحصول على نتائج دقيقة نحتاج إلى متوسط عدة قراءات لكل منهما . والبتة التى تمضى فى أخذ مجموعى القراءات ليس لها أهمية إذا كانت الأداة سفينة ، وقد يتعاون بحارن على ظهر سفينة كبيرة فى أخذ القراءات لنجمين فى نفس الفترة ، إذا دعت الحاجة إلى ذلك . وفى حالة الطائرة تسكنى الفترة لأن تسمع بإزاحة قدرها ١٥ ميلا . وللحصول على نقطة التقاطع المطلوبة لا يستخدم الطيار خط موضعه الحقيقي عند الزمن ن ، بل يريخ خط موضعه الأول فى اتجاه حركة الطائرة . ويتوقف مقدار الإزاحة على  $6^{\circ}$  زاوية ميل اتجاه حركة الطائرة على الإحداثى الرولى لنقطة قدم النجم الأول . فإذا كانت مسرعة فإن المسافة التى تقطعها الطائرة فى الفترة هى ع (ن - ن) = م ميلا والإزاحة المطلوبة هى م جتا  $\theta$  على الإحداثى الرولى .

## الجدول

ملاحظات على استعمال الجدول

**جدول ١** — في جدول ١ توجد العلاقات المعقدة التي تربط الأوزان المختلفة والأحجام المختلفة في النظام المترى وحدات الطول والوزن والحجم هي على الترتيب المتر والجرام والمتر. وتقسّم جميع هذه الوحدات إلى أجزاء أصغر منها بنفس الطريقة، فللدلالة على جزء قدره  $\frac{1}{10}$  من الوحدة يضاف المقطع «سنّي» وعلى جزء قدره  $\frac{1}{100}$  من الوحدة يضاف المقطع «ميلي». أما في حالة ألف وحدة فإننا نضيف المقطع «كيلو».

**جدول ٢** — لقد شرحنا فيما سبق طريقة استخدام جدول الفروق. ويمكن الحصول على القيم التي تقع بين القيم المبيّنة في الجداول بالنسب فمثلاً إذا أردنا تعيين مربع  $28,756$ ، نرى من الجدول أن مربع  $28,75$  هو  $826,5$ . وفي هذا الجزء من جدول الفروق، كل فرق يساوي الواحد في العدد الذي يراد ترتيبه. ننظر فرقا قدره  $7$  في المربع. وعلى ذلك يكون الفرق المساوي  $7$ ، فننظر الفرق قدره  $7 \times 3 = 21$  تقريباً. وعلى ذلك يكون المربع المطلوب  $826,9$ . ويمكن أيضاً استخدام الجدول الثالث في إيجاد الجذور التربيعية. فمثلاً إذا أردنا إيجاد الجذر التربيعي للعدد  $123,2$  نلاحظ بالبحث أن الجذر المطلوب يقع بين  $11$  و  $12$ . وفي الجدول ترى العدد  $1232$  يشكّر مرتين، أولاً عند الأرقام  $11$ ، وثانياً عند الأرقام  $35$ . وعلى ذلك يكون الجذر التربيعي للعدد  $123,2$  هو  $11,1$ . وإذا كان المطلوب هو تعيين الجذر التربيعي للعدد  $123,2$  فنوضح أن هذا الجذر يكون  $351$ .

**جدول ٣** — في أغلب الجداول المثلثية، تعمل أجزاء الزاوية بال دقائق، وبذلك تكون الفترات هي  $6$  و  $12$  و  $30$  وهكذا. وقد بدأت الكسور العشرية سنعمل في التعبير عن هذه الفترات.

ويمكن استخدام جدول الجيوب بجدول الجيوب النقام وذلك باستعمال العبارة  
حا ١ = حا (٩٠ - °)

فمثلاً إذا كان المطلوب تعيين حا  $31,5^\circ$  نعين حا  $58,5^\circ$ .

**جدول ٦** — الاقتصاد لم تعطى جدولاً للأعداد المقابلة للوغاريتمات ويمكن استخدام الجدول السادس للحصول على الأعداد إذا علمت لوغاريتماتها وذلك بعكس عملية إيجاد لوغاريتمات الأعداد. ولكني ننصح بطريقة استعمال هذا الجدول أنظر ص ٥٠٢.

### جدول ١

الأوراق والمقاييس الإنجليزية

١٧٦٠ ياردة	=	ميلا واحداً
٤٨٤٠ ياردة مربعة	=	فداناً واحداً
٦٤٠ فداناً	=	ميلا مربعا
١١٢ رطل	=	هندردويت
٢٠ هندردويت	=	طنناً واحداً
٨ باينت	=	جالون واحداً
١٦٧٧ رصعة مكعبة	=	الجالون
٦٧٣ رصعة مكعبة	=	القدم المكعب

### الأوزان والمقاييس المترية

١٠ مئيمترات	=	سنتيمتراً واحداً.
١٠٠ سنتيمتر	=	متراً واحداً.
١٠٠٠ متر	=	كيلومتراً واحداً.
١٠٠٠ جرام	=	كيلوجراماً واحداً.
١٠٠ سنتنتر	=	لتراً واحداً.
١٠٠٠ سنتيمتراً مكعباً	=	لتر واحد



[illegible]

فوق جدول				فوق جدول				فوق جدول				فوق جدول			
٥	٤	٣	٢	١٤	١٣	١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣
١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	١١	١٢	١٣	١٤	١٥	١٦
١٧	١٨	١٩	٢٠	٢١	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	٣١	٣٢
٣٥	٣٦	٣٧	٣٨	٣٩	٤٠	٤١	٤٢	٤٣	٤٤	٤٥	٤٦	٤٧	٤٨	٤٩	٥٠
٥٣	٥٤	٥٥	٥٦	٥٧	٥٨	٥٩	٦٠	٦١	٦٢	٦٣	٦٤	٦٥	٦٦	٦٧	٦٨
٧١	٧٢	٧٣	٧٤	٧٥	٧٦	٧٧	٧٨	٧٩	٨٠	٨١	٨٢	٨٣	٨٤	٨٥	٨٦
٩٣	٩٤	٩٥	٩٦	٩٧	٩٨	٩٩	١٠٠	١٠١	١٠٢	١٠٣	١٠٤	١٠٥	١٠٦	١٠٧	١٠٨
١١٦	١١٧	١١٨	١١٩	١٢٠	١٢١	١٢٢	١٢٣	١٢٤	١٢٥	١٢٦	١٢٧	١٢٨	١٢٩	١٣٠	١٣١
١٣٩	١٤٠	١٤١	١٤٢	١٤٣	١٤٤	١٤٥	١٤٦	١٤٧	١٤٨	١٤٩	١٥٠	١٥١	١٥٢	١٥٣	١٥٤
١٦٦	١٦٧	١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧١	١٧٢	١٧٣	١٧٤	١٧٥	١٧٦	١٧٧	١٧٨	١٧٩	١٨٠	١٨١
١٩٣	١٩٤	١٩٥	١٩٦	١٩٧	١٩٨	١٩٩	٢٠٠	٢٠١	٢٠٢	٢٠٣	٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨
٢٢١	٢٢٢	٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧	٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠	٢٣١	٢٣٢	٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦
٢٦٤	٢٦٥	٢٦٦	٢٦٧	٢٦٨	٢٦٩	٢٧٠	٢٧١	٢٧٢	٢٧٣	٢٧٤	٢٧٥	٢٧٦	٢٧٧	٢٧٨	٢٧٩
٢٩٦	٢٩٧	٢٩٨	٢٩٩	٣٠٠	٣٠١	٣٠٢	٣٠٣	٣٠٤	٣٠٥	٣٠٦	٣٠٧	٣٠٨	٣٠٩	٣١٠	٣١١
٣٢٨	٣٢٩	٣٣٠	٣٣١	٣٣٢	٣٣٣	٣٣٤	٣٣٥	٣٣٦	٣٣٧	٣٣٨	٣٣٩	٣٤٠	٣٤١	٣٤٢	٣٤٣
٣٦١	٣٦٢	٣٦٣	٣٦٤	٣٦٥	٣٦٦	٣٦٧	٣٦٨	٣٦٩	٣٧٠	٣٧١	٣٧٢	٣٧٣	٣٧٤	٣٧٥	٣٧٦
٣٩٣	٣٩٤	٣٩٥	٣٩٦	٣٩٧	٣٩٨	٣٩٩	٤٠٠	٤٠١	٤٠٢	٤٠٣	٤٠٤	٤٠٥	٤٠٦	٤٠٧	٤٠٨
٤٢٦	٤٢٧	٤٢٨	٤٢٩	٤٣٠	٤٣١	٤٣٢	٤٣٣	٤٣٤	٤٣٥	٤٣٦	٤٣٧	٤٣٨	٤٣٩	٤٤٠	٤٤١
٤٥٨	٤٥٩	٤٦٠	٤٦١	٤٦٢	٤٦٣	٤٦٤	٤٦٥	٤٦٦	٤٦٧	٤٦٨	٤٦٩	٤٧٠	٤٧١	٤٧٢	٤٧٣
٤٩١	٤٩٢	٤٩٣	٤٩٤	٤٩٥	٤٩٦	٤٩٧	٤٩٨	٤٩٩	٥٠٠	٥٠١	٥٠٢	٥٠٣	٥٠٤	٥٠٥	٥٠٦
٥٢٣	٥٢٤	٥٢٥	٥٢٦	٥٢٧	٥٢٨	٥٢٩	٥٣٠	٥٣١	٥٣٢	٥٣٣	٥٣٤	٥٣٥	٥٣٦	٥٣٧	٥٣٨
٥٥٦	٥٥٧	٥٥٨	٥٥٩	٥٦٠	٥٦١	٥٦٢	٥٦٣	٥٦٤	٥٦٥	٥٦٦	٥٦٧	٥٦٨	٥٦٩	٥٧٠	٥٧١
٥٨٨	٥٨٩	٥٩٠	٥٩١	٥٩٢	٥٩٣	٥٩٤	٥٩٥	٥٩٦	٥٩٧	٥٩٨	٥٩٩	٦٠٠	٦٠١	٦٠٢	٦٠٣
٦٢١	٦٢٢	٦٢٣	٦٢٤	٦٢٥	٦٢٦	٦٢٧	٦٢٨	٦٢٩	٦٣٠	٦٣١	٦٣٢	٦٣٣	٦٣٤	٦٣٥	٦٣٦
٦٥٤	٦٥٥	٦٥٦	٦٥٧	٦٥٨	٦٥٩	٦٦٠	٦٦١	٦٦٢	٦٦٣	٦٦٤	٦٦٥	٦٦٦	٦٦٧	٦٦٨	٦٦٩
٦٨٦	٦٨٧	٦٨٨	٦٨٩	٦٩٠	٦٩١	٦٩٢	٦٩٣	٦٩٤	٦٩٥	٦٩٦	٦٩٧	٦٩٨	٦٩٩	٧٠٠	٧٠١
٧١٩	٧٢٠	٧٢١	٧٢٢	٧٢٣	٧٢٤	٧٢٥	٧٢٦	٧٢٧	٧٢٨	٧٢٩	٧٣٠	٧٣١	٧٣٢	٧٣٣	٧٣٤
٧٥١	٧٥٢	٧٥٣	٧٥٤	٧٥٥	٧٥٦	٧٥٧	٧٥٨	٧٥٩	٧٦٠	٧٦١	٧٦٢	٧٦٣	٧٦٤	٧٦٥	٧٦٦
٧٨٣	٧٨٤	٧٨٥	٧٨٦	٧٨٧	٧٨٨	٧٨٩	٧٩٠	٧٩١	٧٩٢	٧٩٣	٧٩٤	٧٩٥	٧٩٦	٧٩٧	٧٩٨
٨١٦	٨١٧	٨١٨	٨١٩	٨٢٠	٨٢١	٨٢٢	٨٢٣	٨٢٤	٨٢٥	٨٢٦	٨٢٧	٨٢٨	٨٢٩	٨٣٠	٨٣١
٨٤٨	٨٤٩	٨٥٠	٨٥١	٨٥٢	٨٥٣	٨٥٤	٨٥٥	٨٥٦	٨٥٧	٨٥٨	٨٥٩	٨٦٠	٨٦١	٨٦٢	٨٦٣
٨٨١	٨٨٢	٨٨٣	٨٨٤	٨٨٥	٨٨٦	٨٨٧	٨٨٨	٨٨٩	٨٩٠	٨٩١	٨٩٢	٨٩٣	٨٩٤	٨٩٥	٨٩٦
٩١٣	٩١٤	٩١٥	٩١٦	٩١٧	٩١٨	٩١٩	٩٢٠	٩٢١	٩٢٢	٩٢٣	٩٢٤	٩٢٥	٩٢٦	٩٢٧	٩٢٨
٩٤٦	٩٤٧	٩٤٨	٩٤٩	٩٥٠	٩٥١	٩٥٢	٩٥٣	٩٥٤	٩٥٥	٩٥٦	٩٥٧	٩٥٨	٩٥٩	٩٦٠	٩٦١
٩٧٩	٩٨٠	٩٨١	٩٨٢	٩٨٣	٩٨٤	٩٨٥	٩٨٦	٩٨٧	٩٨٨	٩٨٩	٩٩٠	٩٩١	٩٩٢	٩٩٣	٩٩٤
١٠١١	١٠١٢	١٠١٣	١٠١٤	١٠١٥	١٠١٦	١٠١٧	١٠١٨	١٠١٩	١٠٢٠	١٠٢١	١٠٢٢	١٠٢٣	١٠٢٤	١٠٢٥	١٠٢٦
١٠٤٤	١٠٤٥	١٠٤٦	١٠٤٧	١٠٤٨	١٠٤٩	١٠٥٠	١٠٥١	١٠٥٢	١٠٥٣	١٠٥٤	١٠٥٥	١٠٥٦	١٠٥٧	١٠٥٨	١٠٥٩
١٠٧٦	١٠٧٧	١٠٧٨	١٠٧٩	١٠٨٠	١٠٨١	١٠٨٢	١٠٨٣	١٠٨٤	١٠٨٥	١٠٨٦	١٠٨٧	١٠٨٨	١٠٨٩	١٠٩٠	١٠٩١
١١٠٩	١١١٠	١١١١	١١١٢	١١١٣	١١١٤	١١١٥	١١١٦	١١١٧	١١١٨	١١١٩	١١٢٠	١١٢١	١١٢٢	١١٢٣	١١٢٤
١١٤١	١١٤٢	١١٤٣	١١٤٤	١١٤٥	١١٤٦	١١٤٧	١١٤٨	١١٤٩	١١٥٠	١١٥١	١١٥٢	١١٥٣	١١٥٤	١١٥٥	١١٥٦
١١٧٤	١١٧٥	١١٧٦	١١٧٧	١١٧٨	١١٧٩	١١٨٠	١١٨١	١١٨٢	١١٨٣	١١٨٤	١١٨٥	١١٨٦	١١٨٧	١١٨٨	١١٨٩
١٢٠٦	١٢٠٧	١٢٠٨	١٢٠٩	١٢١٠	١٢١١	١٢١٢	١٢١٣	١٢١٤	١٢١٥	١٢١٦	١٢١٧	١٢١٨	١٢١٩	١٢٢٠	١٢٢١
١٢٣٩	١٢٤٠	١٢٤١	١٢٤٢	١٢٤٣	١٢٤٤	١٢٤٥	١٢٤٦	١٢٤٧	١٢٤٨	١٢٤٩	١٢٥٠	١٢٥١	١٢٥٢	١٢٥٣	١٢٥٤

جدول لغارسمات الأعداد

العدد				٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١				٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١				٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١			
٦	٥	٤	٣	٦	٥	٤	٣	٦	٥	٤	٣	٦	٥	٤	٣
١٠٠	١٠١	١٠٢	١٠٣	١٠٤	١٠٥	١٠٦	١٠٧	١٠٨	١٠٩	١١٠	١١١	١١٢	١١٣	١١٤	١١٥
١١٦	١١٧	١١٨	١١٩	١٢٠	١٢١	١٢٢	١٢٣	١٢٤	١٢٥	١٢٦	١٢٧	١٢٨	١٢٩	١٣٠	١٣١
١٣٢	١٣٣	١٣٤	١٣٥	١٣٦	١٣٧	١٣٨	١٣٩	١٤٠	١٤١	١٤٢	١٤٣	١٤٤	١٤٥	١٤٦	١٤٧
١٤٨	١٤٩	١٥٠	١٥١	١٥٢	١٥٣	١٥٤	١٥٥	١٥٦	١٥٧	١٥٨	١٥٩	١٦٠	١٦١	١٦٢	١٦٣
١٦٤	١٦٥	١٦٦	١٦٧	١٦٨	١٦٩	١٧٠	١٧١	١٧٢	١٧٣	١٧٤	١٧٥	١٧٦	١٧٧	١٧٨	١٧٩
١٨٠	١٨١	١٨٢	١٨٣	١٨٤	١٨٥	١٨٦	١٨٧	١٨٨	١٨٩	١٩٠	١٩١	١٩٢	١٩٣	١٩٤	١٩٥
١٩٦	١٩٧	١٩٨	١٩٩	٢٠٠	٢٠١	٢٠٢	٢٠٣	٢٠٤	٢٠٥	٢٠٦	٢٠٧	٢٠٨	٢٠٩	٢١٠	٢١١
٢١٢	٢١٣	٢١٤	٢١٥	٢١٦	٢١٧	٢١٨	٢١٩	٢٢٠	٢٢١	٢٢٢	٢٢٣	٢٢٤	٢٢٥	٢٢٦	٢٢٧
٢٢٨	٢٢٩	٢٣٠	٢٣١	٢٣٢	٢٣٣	٢٣٤	٢٣٥	٢٣٦	٢٣٧	٢٣٨	٢٣٩	٢٤٠	٢٤١	٢٤٢	٢٤٣
٢٤٤	٢٤٥	٢٤٦	٢٤٧	٢٤٨	٢٤٩	٢٥٠	٢٥١	٢٥٢	٢٥٣	٢٥٤	٢٥٥	٢٥٦	٢٥٧	٢٥٨	٢٥٩
٢٦٠	٢٦١	٢٦٢	٢٦٣	٢٦٤	٢٦٥	٢٦٦	٢٦٧	٢٦٨	٢٦٩	٢٧٠	٢٧١	٢٧٢	٢٧٣	٢٧٤	٢٧٥
٢٧٦	٢٧٧	٢٧٨	٢٧٩	٢٨٠	٢٨١	٢٨٢	٢٨٣	٢٨٤	٢٨٥	٢٨٦	٢٨٧	٢٨٨	٢٨٩	٢٩٠	٢٩١
٢٩٢	٢٩٣	٢٩٤	٢٩٥	٢٩٦	٢٩٧	٢٩٨	٢٩٩	٣٠٠	٣٠١	٣٠٢	٣٠٣	٣٠٤	٣٠٥	٣٠٦	٣٠٧
٣٠٨	٣٠٩	٣١٠	٣١١	٣١٢	٣١٣	٣١٤	٣١٥	٣١٦	٣١٧	٣١٨	٣١٩	٣٢٠	٣٢١	٣٢٢	٣٢٣
٣٢٤	٣٢٥	٣٢٦	٣٢٧	٣٢٨	٣٢٩	٣٣٠	٣٣١	٣٣٢	٣٣٣	٣٣٤	٣٣٥	٣٣٦	٣٣٧	٣٣٨	٣٣٩
٣٤٠	٣٤١	٣٤٢	٣٤٣	٣٤٤	٣٤٥	٣٤٦	٣٤٧	٣٤٨	٣٤٩	٣٥٠	٣٥١	٣٥٢	٣٥٣	٣٥٤	٣٥٥
٣٥٦	٣٥٧	٣٥٨	٣٥٩	٣٦٠	٣٦١	٣٦٢	٣٦٣	٣٦٤	٣٦٥	٣٦٦	٣٦٧	٣٦٨	٣٦٩	٣٧٠	٣٧١
٣٧٢	٣٧٣	٣٧٤	٣٧٥	٣٧٦	٣٧٧	٣٧٨	٣٧٩	٣٨٠	٣٨١	٣٨٢	٣٨٣	٣٨٤	٣٨٥	٣٨٦	٣٨٧
٣٨٨	٣٨٩	٣٩٠	٣٩١	٣٩٢	٣٩٣	٣٩٤	٣٩٥	٣٩٦	٣٩٧	٣٩٨	٣٩٩	٤٠٠	٤٠١	٤٠٢	٤٠٣
٤٠٤	٤٠٥	٤٠٦	٤٠٧	٤٠٨	٤٠٩	٤١٠	٤١١	٤١٢	٤١٣	٤١٤	٤١٥	٤١٦	٤١٧	٤١٨	٤١٩
٤٢٠	٤٢١	٤٢٢	٤٢٣	٤٢٤	٤٢٥	٤٢٦	٤٢٧	٤٢٨	٤٢٩	٤٣٠	٤٣١	٤٣٢	٤٣٣	٤٣٤	٤٣٥
٤٣٦	٤٣٧	٤٣٨	٤٣٩	٤٤٠											

٢٠٢١		٢٠٢٠		٢٠١٩		٢٠١٨		٢٠١٧		٢٠١٦		٢٠١٥		٢٠١٤		٢٠١٣		٢٠١٢		٢٠١١		٢٠١٠		٢٠٠٩		٢٠٠٨		٢٠٠٧		٢٠٠٦		٢٠٠٥		٢٠٠٤		٢٠٠٣		٢٠٠٢		٢٠٠١		٢٠٠٠		١٩٩٩		١٩٩٨		١٩٩٧		١٩٩٦		١٩٩٥		١٩٩٤		١٩٩٣		١٩٩٢		١٩٩١		١٩٩٠		١٩٨٩		١٩٨٨		١٩٨٧		١٩٨٦		١٩٨٥		١٩٨٤		١٩٨٣		١٩٨٢		١٩٨١		١٩٨٠		١٩٧٩		١٩٧٨		١٩٧٧		١٩٧٦		١٩٧٥		١٩٧٤		١٩٧٣		١٩٧٢		١٩٧١		١٩٧٠		١٩٦٩		١٩٦٨		١٩٦٧		١٩٦٦		١٩٦٥		١٩٦٤		١٩٦٣		١٩٦٢		١٩٦١		١٩٦٠		١٩٥٩		١٩٥٨		١٩٥٧		١٩٥٦		١٩٥٥		١٩٥٤		١٩٥٣		١٩٥٢		١٩٥١		١٩٥٠		١٩٤٩		١٩٤٨		١٩٤٧		١٩٤٦		١٩٤٥		١٩٤٤		١٩٤٣		١٩٤٢		١٩٤١		١٩٤٠		١٩٣٩		١٩٣٨		١٩٣٧		١٩٣٦		١٩٣٥		١٩٣٤		١٩٣٣		١٩٣٢		١٩٣١		١٩٣٠		١٩٢٩		١٩٢٨		١٩٢٧		١٩٢٦		١٩٢٥		١٩٢٤		١٩٢٣		١٩٢٢		١٩٢١		١٩٢٠		١٩١٩		١٩١٨		١٩١٧		١٩١٦		١٩١٥		١٩١٤		١٩١٣		١٩١٢		١٩١١		١٩١٠		١٩٠٩		١٩٠٨		١٩٠٧		١٩٠٦		١٩٠٥		١٩٠٤		١٩٠٣		١٩٠٢		١٩٠١		١٩٠٠		١٨٩٩		١٨٩٨		١٨٩٧		١٨٩٦		١٨٩٥		١٨٩٤		١٨٩٣		١٨٩٢		١٨٩١		١٨٩٠		١٨٨٩		١٨٨٨		١٨٨٧		١٨٨٦		١٨٨٥		١٨٨٤		١٨٨٣		١٨٨٢		١٨٨١		١٨٨٠		١٨٧٩		١٨٧٨		١٨٧٧		١٨٧٦		١٨٧٥		١٨٧٤		١٨٧٣		١٨٧٢		١٨٧١		١٨٧٠		١٨٦٩		١٨٦٨		١٨٦٧		١٨٦٦		١٨٦٥		١٨٦٤		١٨٦٣		١٨٦٢		١٨٦١		١٨٦٠		١٨٥٩		١٨٥٨		١٨٥٧		١٨٥٦		١٨٥٥		١٨٥٤		١٨٥٣		١٨٥٢		١٨٥١		١٨٥٠		١٨٤٩		١٨٤٨		١٨٤٧		١٨٤٦		١٨٤٥		١٨٤٤		١٨٤٣		١٨٤٢		١٨٤١		١٨٤٠		١٨٣٩		١٨٣٨		١٨٣٧		١٨٣٦		١٨٣٥		١٨٣٤		١٨٣٣		١٨٣٢		١٨٣١		١٨٣٠		١٨٢٩		١٨٢٨		١٨٢٧		١٨٢٦		١٨٢٥		١٨٢٤		١٨٢٣		١٨٢٢		١٨٢١		١٨٢٠		١٨١٩		١٨١٨		١٨١٧		١٨١٦		١٨١٥		١٨١٤		١٨١٣		١٨١٢		١٨١١		١٨١٠		١٨٠٩		١٨٠٨		١٨٠٧		١٨٠٦		١٨٠٥		١٨٠٤		١٨٠٣		١٨٠٢		١٨٠١		١٨٠٠		١٧٩٩		١٧٩٨		١٧٩٧		١٧٩٦		١٧٩٥		١٧٩٤		١٧٩٣		١٧٩٢		١٧٩١		١٧٩٠		١٧٨٩		١٧٨٨		١٧٨٧		١٧٨٦		١٧٨٥		١٧٨٤		١٧٨٣		١٧٨٢	
------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--	------	--

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122	123	124	125	126	127	128	129	130	131	132	133	134	135	136	137	138	139	140	141	142	143	144	145	146	147	148	149	150	151	152	153	154	155	156	157	158	159	160	161	162	163	164	165	166	167	168	169	170	171	172	173	174	175	176	177	178	179	180	181	182	183	184	185	186	187	188	189	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209	210	211	212	213	214	215	216	217	218	219	220	221	222	223	224	225	226	227	228	229	230	231	232	233	234	235	236	237	238	239	240	241	242	243	244	245	246	247	248	249	250	251	252	253	254	255	256	257	258	259	260	261	262	263	264	265	266	267	268	269	270	271	272	273	274	275	276	277	278	279	280	281	282	283	284	285	286	287	288	289	290	291	292	293	294	295	296	297	298	299	300	301	302	303	304	305	306	307	308	309	310	311	312	313	314	315	316	317	318	319	320	321	322	323	324	325	326	327	328	329	330	331	332	333	334	335	336	337	338	339	340	341	342	343	344	345	346	347	348	349	350	351	352	353	354	355	356	357	358	359	360	361	362	363	364	365	366	367	368	369	370	371	372	373	374	375	376	377	378	379	380	381	382	383	384	385	386	387	388	389	390	391	392	393	394	395	396	397	398	399	400	401	402	403	404	405	406	407	408	409	410	411	412	413	414	415	416	417	418	419	420	421	422	423	424	425	426	427	428	429	430	431	432	433	434	435	436	437	438	439	440	441	442	443	444	445	446	447	448	449	450	451	452	453	454	455	456	457	458	459	460	461	462	463	464	465	466	467	468	469	470	471	472	473	474	475	476	477	478	479	480	481	482	483	484	485	486	487	488	489	490	491	492	493	494	495	496	497	498	499	500	501	502	503	504	505	506	507	508	509	510	511	512	513	514	515	516	517	518	519	520	521	522	523	524	525	526	527	528	529	530	531	532	533	534	535	536	537	538	539	540	541	542	543	544	545	546	547	548	549	550	551	552	553	554	555	556	557	558	559	560	561	562	563	564	565	566	567	568	569	570	571	572	573	574	575	576	577	578	579	580	581	582	583	584	585	586	587	588	589	590	591	592	593	594	595	596	597	598	599	600	601	602	603	604	605	606	607	608	609	610	611	612	613	614	615	616	617	618	619	620	621	622	623	624	625	626	627	628	629	630	631	632	633	634	635	636	637	638	639	640	641	642	643	644	645	646	647	648	649	650	651	652	653	654	655	656	657	658	659	660	661	662	663	664	665	666	667	668	669	670	671	672	673	674	675	676	677	678	679	680	681	682	683	684	685	686	687	688	689	690	691	692	693	694	695	696	697	698	699	700	701	702	703	704	705	706	707	708	709	710	711	712	713	714	715	716	717	718	719	720	721	722	723	724	725	726	727	728	729	730	731	732	733	734	735	736	737	738	739	740	741	742	743	744	745	746	747	748	749	750	751	752	753	754	755	756	757	758	759	760	761	762	763	764	765	766	767	768	769	770	771	772	773	774	775	776	777	778	779	780	781	782	783	784	785	786	787	788	789	790	791	792	793	794	795	796	797	798	799	800	801	802	803	804	805	806	807	808	809	810	811	812	813	814	815	816	817	818	819	820	821	822	823	824	825	826	827	828	829	830	831	832	833	834	835	836	837	838	839	840	841	842	843	844	845	846	847	848	849	850	851	852	853	854	855	856	857	858	859	860	861	862	863	864	865	866	867	868	869	870	871	872	873	874	875	876	877	878	879	880	881	882	883	884	885	886	887	888	889	890	891	892	893	894	895	896	897	898	899	900	901	902	903	904	905	906	907	908	909	910	911	912	913	914	915	916	917	918	919	920	921	922	923	924	925	926	927	928	929	930	931	932	933	934	935	936	937	938	939	940	941	942	943	944	945	946	947	948	949	950	951	952	953	954	955	956	957	958	959	960	961	962	963	964	965	966	967	968	969	970	971	972	973	974	975	976	977	978	979	980	981	982	983	984	985	986	987	988	989	990	991	992	993	994	995	996	997	998	999	1000
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	------







٣٢ - الطليعة النووية - تأليف هيزلبرج - ترجمة الدكتور سيد رمضان هدارة

٣٣ - من البحر إلى الطب - ترجمة الدكتور أحمد زكي الحكيم

٣٤ - شخصية الحيوان - تأليف مونترو فوكس - ترجمة الدكتور فتحي الغزاوي

٣٥ - الكيمياء العضوية وبنائها اليومية - تأليف ه. ريد - ترجمة الدكتور عبدالقادر فطين

٣٦ - الرياضة للمليون ج ٢ - تأليف لانسلوت برهين - ترجمة الدكتور عطيه عاشور وآخرين

١٧ - الانسان والميكروب والمريض - تأليف جون درو - ترجمة الدكتور

محمد رشاد الطوفي

١٨ - الفيروس والانسان - تأليف ف. م. برت - ترجمة الدكتور سعد الدين عبد الغفار

١٩ - استخدام الطاقة الذرية - تأليف أوتوهان - ترجمة الدكتور عفاف وبرى

٢٠ - علاج نفسك بالغذاء - للدكتور ابراهيم فنيح

٢١ - الكشف والفتح في الميدان العلمي - للدكتور مالكوم بريس - ترجمة الدكتور أحمد حماد الحسيني

٢٢ - البحر المغيط بنا - تأليف راشيل كارسون - ترجمة الأستاذ أحمد محمد مختار

٢٣ - الوراثة والسلالة والمجتمع - تأليف ر. د. - ترجمة الدكتور عز الدين فراخ

٢٤ - إلى عالم آخر - تأليف ورنو بودلر - ترجمة الدكتور عبد الحميد عبد أمين

٢٥ - الشمس - تأليف جامو - ترجمة الدكتور أحمد حماد

٢٦ - الرياضة للمليون ج ١ - تأليف لانسلوت هوجين - ترجمة الدكتور عطيه عاشور وإيمانه

٢٧ - استخفاء الحيوان - تأليف أ. م. ستيفنسون - ترجمة الدكتور ابراهيم عبد الغني

٢٨ - الجنس البشري - للدكتور أحمد محمود البقر اوى

٢٩ - التقويم - للأستاذ محمد محمد فياض

٣٠ - فيولوجيا الانسان - تأليف دينيس وولكر - ترجمة الدكتور فتحي الغزاوي

٣١ - مع النجوم في تطورها - تأليف سيسيليا يلين جابوشكين - ترجمة الدكتور صلاح الدين حماد

## صدر عن مكتبة الشرق في مشروع الألف كتاب

- ١ - حركات الشباب الاجتماعية - للدكتور محمد فتحي
- ٢ - عذراء البورين - ماكسيميل أندريسون - ترجمة عبد الله البشير ونوروت أباظة
- ٣ - بين العمل والأمل - تأليف المنس جني بل - ترجمة مصطفى محمد الباشا
- ٤ - الرياضة للعلميون ( جزء أول ) - تأليف لانسكوت جوجين ترجمة الدكتور الدكتور عطيه عطيه عاشور وآخرين -
- ٥ - الرياضة للعلميون - ( جزء ثان ) تأليف لانسكوت جوجين - ترجمة عاشور وآخرين
- ٦ - الطفل الوهوب - تأليف ماريان شيفيل - ترجمة الدكتور رياض عسكر
- ٧ - ماهو الجنس ؟ - من مؤلفات اليونسكو - ترجمة الدكتور يوسف أبو الحجاج
- ٨ - الجغرافيا مغزاها ومزاجها - من .و. ولدر د ج .و. جوردون ليست - ترجمة الدكتور يوسف أبو الحجاج
- ٩ - التاريخ دراسة مسلية - تأليف مونزوليف - ترجمة عبيد الغنى الشال وأحمد علي فريد
- ١٠ - عشرة من أئمة الاقتصاد - تأليف جوزيف . ا . شومبيتر ترجمة الدكتور حسين عمر
- ١١ - أعماد من تراثنا - للأستاذ عزيز مرقص منصور
- ١٢ - مصلح البيانو الغرير - تأليف مارسيل برينو - ترجمة الأستاذ حسن صادق

## صدر عن مكتبة الشرق في مشروع الألف كتاب

- ١ - حركات الشباب الاجتماعية - للدكتور محمد فتحي
- ٢ - عقراء البورين - ماكسويل أندرسون - ترجمة عباد الله البشير وثروت أياظة
- ٣ - بين العمل والأمل - تأليف المنس جوني بل - ترجمة مصطفى محمد البنايني
- ٤ - الرياضة للبليون (جزء أول) - تأليف لانسلاوت هوجين - ترجمة الدكتور الدكتور عطيه عطيه عشر وأربعين
- ٥ - الرياضة للبليون (جزء ثان) - تأليف لانسلاوت هوجين - ترجمة عاشور وأربعين
- ٦ - الطفل الموهوب - تأليف ماريان شيليل - ترجمة الدكتور رياض عسكر
- ٧ - مبانو الجنس ٩ - من مؤلفات البونسكو - ترجمة الدكتور يوسف أبو الخجاج
- ٨ - الجغرافيا مغزاها ودرماها - من مؤلفات ج. و. جوردون - ترجمة الدكتور يوسف أبو الخجاج
- ٩ - التاريخ دراسة مسلية - تأليف مونزوليف - ترجمة عبيد الغنى الشال وأحمد علي فريد
- ١٠ - عشرة من أئمة الاقتصاد - تأليف جوزيف . ا. شومبيتر - ترجمة الدكتور حسين عمر
- ١١ - مجاهد من تراثنا - للأستاذ عزيز مرقص منصور
- ١٢ - ضلج البيانو الضريز - تأليف مارسيل برينو - ترجمة الأستاذ حسن صادق